Probabilités (suite)

Exercice 1.

On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec une probabilité égale à $\frac{1}{8}$, 1 ou 2 descendants avec probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec probabilité à $\frac{1}{8}$. La population est initialement composée d'un seul individu. Les différents individus se comportent de manière indépendante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « à l'issue de la n-ème génération, l'espèce a totalement disparu ».

On pose $x_n = p(E_n)$. En particulier, $x_1 = \frac{1}{8}$.

Pour $0 \leq k \leq 3$, on note A_k l'événement : « la première génération compte k individus ».

1. Soit $n \in N^*$. Calculer $p(E_n|A_k)$.
2. En déduire que $x_{n+1} = \frac{1}{8}\left(x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n + 1\right)$.
3. Montrer que (x_n) converge vers une limite que l'on déterminera. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs $a_1, \ldots, a_n$ avec

$$P(X = a_i) = P(Y = a_i) = p_i$$

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.
Montrer que

$$P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$$

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles strictement positives indépendantes et de même loi. Montrez que

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1,$$

préciser les cas d'égalités.

Exercice 4.

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Marche aléatoire en dimension 1 :

Une puce se déplace se déplace dans $\mathbb{Z}$. On note X_n sa position l'instant n et on a $X_0 = 0$. A chaque unité de temps, elle saute de $+1$ avec une probabilité de p et de -1 avec une probabilité de $q = 1 - p$, sans tenir compte de ses sauts précédents.

Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 7.

Soit un compteur initialisé à 0.

On joue n fois à pile ou face. A chaque lancer, on augmente le compteur de

(i) 1, si le résultat est pile.

(ii) 2, si le résultat est face.

On note X_k la valeur du compteur au k-ème lancer.

1. Déterminer la loi de X_k.
2. L'espérance et la variance de X_k.
3. Pour $i \in [1, n]$, on note p_i la probabilité que $i \in \{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\}$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre les p_i.
   (b) En déduire l'expression de p_i en fonction de i.
   (c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

Un avion a 2 moteurs à droite et 2 moteurs à gauche ; la probabilité qu'un moteur tombe en panne est 0.01. Trouver la loi de X qui indique le nombre de moteurs qui tombent en panne. L'avion vole tant qu'il y a au moins un moteur qui marche de chaque côté. Trouver la probabilité de s'écraser.

Exercice 9.

Une urne contient des boules de 1 à n ; on tire 1 boule sans remise jusqu' à avoir un numéro strictement supérieur à un des numéros obtenus auparavant ou jusqu'à avoir toutes les n boules. X désigne le nombre de tirages. Trouver les valeurs de X.Calculer $p(X > k)$ puis la loi de X et $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 10.

On tire n fois de suite avec remise une boule dans une urne contenant n boule numérotés de 1 à n. X désigne le nombre de fois où au tirage i sort la boule i. Déterminer la loi de X et $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 11.

Une roue de loterie se compose de trois secteurs rouges, quatre blancs, et n verts ($n \geq 1$). Chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant un repère fixe. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 euros ; s'il est blanc il perd 12 euros, et s'il est vert il relance la roue : si le nouveau secteur repéré est rouge, il gagne 8 euros, s'il est blanc, il perd 2 euros et s'il est vert, il ne gagne ni ne perd rien. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Déterminer n pour que le gain soit maximal.

Exercice 12.

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. On appelle X le nombre de faces obtenues. Ce nombre est affiché par un compteur.

1. Le compteur fonctionne normalement et affiche la valeur de X . Trouver la loi de X et $\mathrm{E}(X)$.
2. Le compteur est détraqué : si X est non nul, le compteur affiche le résultat correct, mais si X est nul, il affiche un nombre choisi au hasard entre 1 et n. On appelle Y le nombre affiché par le compteur. Préciser les valeurs prises par Y, puis déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 13.

On lance un dé non pipé n fois de suite. X_i désigne la variable aléatoire discrète égale au numéro obtenu au i-ème lancer, et S est égale à la somme des numéros obtenus.

1. Calculer la moyenne et la variance de S.
2. Soit $a > 0$.Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|S-\frac{7}{2}\right| \geq a\right)$.
3. Déterminer une valeur de n à partir de laquelle on a au moins 95% de chances pour $\frac{S}{n}$ que entre 3,4 et 3,6 .

Exercice 14.

La clientèle d'une compagnie de transport est composée d'usagers réguliers effectuant chacun 40 trajets par mois. Ces usagers doivent acheter chaque mois un titre de transport coûtant 400 euros et couvrant l'ensemble des trajets mensuels. Afin de lutter contre la fraude, la compagnie organise des contrôles, de telle $\frac{1}{10}$. à l'autre. Le but de l'exercice est de déterminer la somme N qu'il faut faire payer à chaque fraudeur pour qu'un fraudeur paye en moyenne au moins autant qu'un usager ayant acheté son titre de transport. On note X le nombre de trajets dans le mois au cours desquels un usager choisi au hasard est contrôlé.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Préciser l'espérance et la variance de X
2. Déterminer la valeur minimale de N.
3. On fixe $N = 100$ euros, puis $N = 200$ euros. Quelle est la probabilité pour qu'un fraudeur paie une somme inférieure ou égale à celle d'un usager ayant acquis le titre de transport ?

Exercice 15.

Soit $n \in N$ avec $n \geq 3$. On dispose d'une urne pourvue de n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules sans remise jusqu'à ce que les boules 1,2 et 3 soient sorties. On note X le nombre de boules tirées.

1. Calculer la probabilité que les boules 1,2,3 sortent consécutivement et dans cet ordre.
2. Calculer la probabilité que les boules 1,2,3 sortent dans cet ordre consécutivement ou pas.
3. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 16. [Not Seven]

Le compteur de gain est initialiser à 0. A chaque tour de jeu, s'il n'a pas perdu et pas encore joué n coups, le joueur a 2 possibilités :

(i Arrêter de jouer et embaucher une somme égale au compteur.

(ii Lancer les 2 dés à 6 faces non pipés, si le score est 7, il perd, sinon le compteur augmente du score obtenue.

1. Calculer la probabilité de perdre au k-ème tour de jeu.
2. Calculer l'espérance du nombre de coup.
3. Vous jouez en mode omniscient, vous connaissez donc le résultat du prochain lancer de dé, calculer l'espérance de gain dans se mode de jeu.
4. On revient dans le mode du joueur normal. On suppose avoir jour k coups et que le compteur vaut alors i.
   (a) On rejoue, calculer l'espérance de gain au cout suivant.
   (b) Pour quel valeur de i, a-t-on intérêt à rejouer ?