Limite, continuité et dérivabilité

Partie 1 : Limite

Exercice 1.

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique possédant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ et $g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On suppose que g est croissante, montrer que f est constante.

Partie 2 : Calcul d'équivalent et calcul pratique de de limite

Exercice 4.

1. Soient f et g des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Montrer l'équivalence suivante : $e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim\limits_{a}(f - g) = 0$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ peut-on en déduire $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 5.

Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

1) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{1/x}$ 4) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1-x}{\arccos x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to0} x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} \qquad 2)\ \lim_{x\to0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \qquad 3)\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x})$$

$$4)\ \lim_{x\to1^+} \frac{x^x - 1}{\left(\ln(1+\sqrt{x^2-1})\right)^2} \qquad 5)\ \lim_{x\to1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

Partie 3 : Continuité

Exercice 7.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Montrer les égalités suivantes

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$$

Cela reste-t-il vrai, si on enlève l'hypothèse de continuité ?

Exercice 8. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x).$$

Exercice 9. Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x)$.

Exercice 12.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 13. $\star$[Un théorème de point fixe] Soit f une fonction k-contractante (c'est-à-dire k-lipschitzienne avec $k < 1$) sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$.

1. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe ℓ. (C'est-à-dire un réel x tel que $f(x) = x$.)
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ. On donnera une majoration de $(u_n - \ell)$ permettant d'évaluer la vitesse de convergence.
3. Montrer que le résultat reste vrai si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 14. $\star$

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement décroissante. Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \varphi$.
2. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) + x = 0$?

Exercice 15. $\star$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2.$$

Partie 4 : Dérivabilité

Exercice 16.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à t associe t^3 si $t < 0$ et 0 sinon. Montrer que φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $(f,g) \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad g(x) \geq 0 \\ f(x) + (g(x))^3 & \text{si} \quad g(x) < 0 \end{cases}$
   Montrer que h est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Montrer que f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{(e^x-1)x}$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. **Exercice 18.** Soit f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$, tel que $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]a, +\infty[$.

Exercice 19. $\star$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(n, k, \ell) \in \mathbb{N}^3$ tels que $0 \leq \ell \leq k$ et $0 \leq \ell \leq n$ et enfin la fonction f est n fois dérivable sur I. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(\ell)}$ admet au moins $(k - \ell)$ zéros dans I.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{F}([a,b])$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

   (Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)
2. Cas général : Soit $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 21. $\star$

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que f' admette une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 22. $\star$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, bornée et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f'' soit positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + \sin x$.

1. Dresser les tableaux de variations de f et f' sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer l'image de $[0,+\infty[$ par f. On note J cette image.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
4. Calculer $f^{-1}(\pi^2)$ et $(f^{-1})'(\pi^2)$.

Exercice 24.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et qu'on a $\alpha \in]0,1[$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 25.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $(x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

Indications :

Exercice 21 : On pourra commencer par montrer que si $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.