Suites à valeurs réelles (et complexes)

1 Compléments sur le corps des réels

1.1 Borne supérieure

1.1.1 Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$), la borne sup de A, si elle existe, elle est le plus petit des majorants de A. On la note $\sup(A)$.

1.1.2 Propriétés

Proposition 1. *Soit A une partie, on a la suite d'implications suivantes :*

$$A \text{ admet un plus grand élément} \Longrightarrow A \text{ admet une borne sup} \Longrightarrow A \text{ est majorée.}$$

Remarque : Les réciproques sont en général fausses.

Proposition 2. *Le corps $\mathbb{Q}$ admet des parties majorées sans borne supérieure.*

Remarque : C'est une des raisons de la construction du corps des réels.

Proposition 3. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup.*

Proposition 4 (Caractérisation de la borne sup)**.** *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel, il y a équivalence entre :*

1. *M est la borne sup de A.*
2. *M est majorant de A et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément x_0 de A, tel que $x_0 \geq M - \epsilon$.*
3. *M est un majorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.*

Remarque : Tous les résultats sur la borne supérieure se transfère à la borne inférieure (le plus grand des minorants) notée $\inf(A)$.

Exemples :

1. Déterminons la borne sup et la borne inf, si elle existe de
$$A = \left\{ \frac{n+2m}{n+m} \,;\, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}.$$
Pour $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a
$$\frac{n+2m}{n+m} = \frac{n+m+m}{n+m} = 1 + \frac{m}{n+m} > 1,$$
on en déduit que 1 est un minorant de A, la suite (u_k) définie par $u_k = 1 + \frac{1}{k+1} \in A$ vérifie $\lim_k u_k = 1$. On en déduit que $\boxed{\inf A = 1}$. De même, on a
$$\frac{n+2m}{n+m} = \frac{2n+2m-n}{n+m} = 2 - \frac{n}{n+m} < 2,$$
on en déduit que 2 est un majorant de A, la suite (v_k) définie par $v_k = 2 - \frac{1}{1+k} \in A$ vérifie $\lim_k v_k = 2$. On en déduit que $\boxed{\sup A = 2}$. Le nombre 1 (respectivement 2) n'est pas le plus petit (respectivement le plus grand) élément de A, car il n'est pas élément de A.

2. Déterminons la borne sup et la borne inf, si elle existe de
$$B = \left\{x^2 + y^2\,;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy = 1\right\}.$$
La partie B n'est pas majorée, car pour tout entier $n > 0$, $n^2 + \frac{1}{n^2} \in B$, donc il existe des éléments arbitrairement grand dans B.
La partie B est non vide minorée par 0, elle admet donc une borne inf. On peut reformuler l'écriture B sous la forme
$$B = \left\{x^2 + x^{-2}\,;\ x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$
On étudie la quantité $f(x) = x^2 + x^{-2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, grâce à la parité. On a alors $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 2\frac{x^3-1}{x^3}$ et

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On conclut que $\inf(B) = 2$ et c'est le plus petit élément de B.

Dans certain cas, on étend la définition de la borne sup (respectivement borne inf) au cas d'une partie A non vide non majorée (respectivement non minorée) en posant $\sup A = +\infty$ (respectivement $\inf(A) = -\infty$).

Proposition 5 (Caractérisation d'un intervalle)**.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, il y a équivalence entre*

(i) A est un intervalle.

(ii) $\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$

et si cette propriété est vérifiée, on a
$$]\inf(A), \sup(A)[\subset A \subset [\inf(A), \sup(A)].$$

1.2 Partie entière, valeur approchée et densité

Définition 1. *Soit x un nombre réel, on définit la partie entière de x comme le plus grand entier relatif inférieur à x, on la note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$). C'est-à-dire*
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemples : $\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1$, $\lfloor \ln 2 \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -e \rfloor = -3$, $\lfloor -4,2 \rfloor = -5$

Définition 2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe y élément de A tel que $|x - y| \leq \epsilon$.*

Proposition 6 (Caractérisation de la densité)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, il y a équivalence entre :*

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) pour tout couple de nombres réels distincts (x, y), il existe un élément a de A compris entre x et y.

(iii) pour réel x, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Proposition 7. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (respectivement des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, des nombres décimaux $\mathbb{D}$) est dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 3. *Soient x un nombre réel, y un nombre décimal et n un entier, on dit que y est une approximation décimale de x à 10^{-n}, si $|x - y| \leq 10^{-n}$. C'est une approximation par défaut si $y \leq x$, par excès si $x \leq y$.*

2 Définitions et généralités sur les suites

2.1 Définitions

Une suite de nombres réels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On notera une suite sous forme de famille de nombres réels indexés par $\mathbb{N}$ noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n).

Une suite (u_n) est :

- constante, si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0.$$
- vérifie une propriété $\mathcal{P}(n)$ à partir d'un certain rang, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est satisfaite.}$$
- stationnaire, si elle est constante à partir d'un certain rang. C'est-à-dire
$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}.$$

2.2 Structure algébrique des suites réelles

L'ensemble des suites de nombres réels est muni d'un structure d'espace vectoriel avec les règles usuelles :

$$\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \begin{array}{lll} (u_n+v_n) = (w_n) & \text{où } (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, & w_n = u_n + v_n \\ (\lambda u_n) = (h_n) & \text{où } (h_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, & h_n = \lambda u_n \end{array}$$

On a, de plus, la multiplication des suites

$$\forall (u_n),(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad (u_n v_n) = (t_n) \text{ où } (t_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = u_n v_n.$$

2.3 Propriétés liés à la relation d'ordre

Une suite (u_n) est majorée (respectivement minorée) si la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$A = \{u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est majorée (respectivement minorée). On le quantifie la majoration par

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Une suite est bornée, si elle est majorée et minorée.

Remarque: Pour démontrer qu'une suite (v_n) est bornée, on démontre souvent que la suite $(|v_n|)$ est majorée.

Une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante), si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n \quad (\text{respectivement } 0 \geq u_{n+1} - u_n).$$

Une suite est monotone, si elle est croissante ou décroissante.

Remarques:

1. On parlera souvent de croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si (u_n) est une suite de réels strictement **positifs**, la monotonie peut se déterminer en étudiant la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice :

Que dire des suites suivantes ?

$(u_n) = (\frac{1}{n+1})$
$(v_n) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$
$(w_n) = (a^n)$ où $a \in \mathbb{R}^+$
$(t_n) = ((-1)^n)$
$(h_n) = (-k_n)$ où (k_n) est une suite monotone.
$(a_n) = (b_n + c_n)$ où $(a_n), (b_n)$ sont deux suites monotones.
(d_n) est une suite croissante et décroissante à partir d'un certain rang.

2.4 Suites de référence

2.4.1 Suites arithmétiques

Soit $a \in \mathbb{C}$ et la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + na$.

2.4.2 Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$ et la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

2.4.3 Suites arithmético-géométriques

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ et la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$, où $\ell = \frac{b}{1-a}$ est l'unique solution à l'équation $z = az + b$.

2.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$ et la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Soient α_1 et α_2, les 2 racines de l'équation $z^2 = az + b$, on a alors 2 cas

(i) Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, tel que pour tout n,

$$u_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n.$$

(ii) Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, il existe $A_1, A_0 \in \mathbb{C}$, tel que pour tout n,

$$u_n = (A_1 n + A_0)\alpha^n.$$

Exemple :

Soit la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

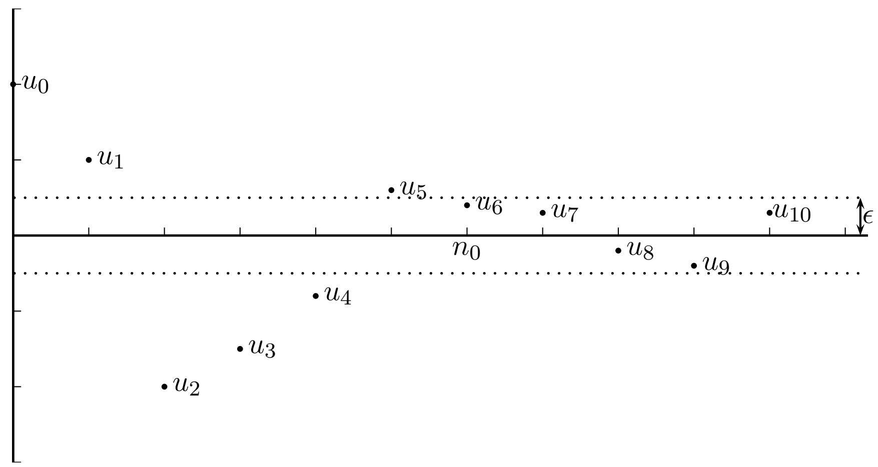
3 Convergence et divergence de suites

3.1 Definitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels, on dit la suite (u_n) converge vers 0, si pour tout réel $\epsilon > 0$, on a à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq \epsilon$. On peut le quantifier par

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \qquad |u_n| \leq \epsilon.$$

« C'est-à-dire que les termes de la suite sont aussi proches de 0 que l'on souhaite à partir d'un certain rang. »



Soit (u_n) une suite de nombres réels, on dit la suite (u_n) converge vers ℓ, si la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ converge vers 0. Le nombre ℓ, si il existe, est unique et est appelé limite de (u_n). Si la suite (u_n) converge vers ℓ, on note

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \qquad \text{(ou } \lim_n u_n = \ell \text{ si il n'y a pas d'ambiguité).}$$

3.2 Premières propriétés

Proposition 8. *Soient une suite (u_n) qui converge vers ℓ et α, β 2 réels tel que $\alpha < \ell < \beta$, alors à partir d'un certain rang, on a*

$$\alpha < u_n < \beta.$$

Corollaire 1. *Si la suite (u_n) converge, alors la suite (u_n) est bornée.*

3.3 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 9. *Soient 2 suites (u_n) et (v_n) qui convergent ver ℓ_1 et ℓ_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a*

(i) La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

(ii) La suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell_1$.

(iii) La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell_1 \ell_2$.

(iv) Si $\ell_1 \neq 0$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0\right)$, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell_1}$.

(v) Si $\ell_1 \neq 0$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0\right)$, alors la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell_2}{\ell_1}$.

Remarques:

1. Les propriétés (i) et (ii) et le fait que la suite identiquement nulle converge permettra de justifier que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel des suites. (Une partie non vide stable par combinaison linéaire)
2. En générale pour (iv) et (v), on ne vérifiera pas la condition $\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0\Big)$, car $\ell_1 \neq 0$ permet déjà d'avoir la propriété $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

3.4 Suites divergentes

3.4.1 Définitions

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si elle vérifie :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, \qquad u_n \geq M \quad (\text{respectivement } u_n \leq M).$$

« La suite (u_n) est plus grande (respectivement petite) que M arbitraire à partir d'un certain rang n_0 [(a)]. »

On construit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On étend la notion de convergence aux limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, par une suite (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si elle converge dans $\mathbb{R}$ vers ℓ (si cette quantité est finie) ou si elle diverge vers ℓ (si $\ell = \pm\infty$).

Sauf indication du texte qui précise que l'on travaille dans $\overline{\mathbb{R}}$, quand on dit qu'une suite converge, on a parle de convergence dans $\mathbb{R}$.

3.4.2 Propriétés des suites divergentes à l'infini

On généralise le résultat sur les suites extraites de suites convergentes.

Proposition 10. *Soit une suite (u_n) qui diverge vers $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$, alors toute suite extraite de la suite (u_n) diverge vers ℓ.*

Proposition 11 (Règles opératoires)**.** *Soient une suite (u_n) qui diverge vers $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$ et une suite (v_n), alors on a :*

(i) Si la suite (v_n) est minorée et $\ell = +\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$.

(ii) Si la suite (v_n) est majorée et $\ell = -\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ diverge vers $-\infty$.

(iii) Si la suite (v_n) converge vers une limite non nulle $\ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite $(u_n v_n)$ diverge vers $\mathrm{sg}(\ell_1)\ell$. (On rappelle que la fonction signe sg *est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$)*

Remarque: Le plus souvent, l'hypothèse sur la suite (v_n) de (i) et (ii) sera vérifiée par le fait que la suite (v_n) converge vers une limite finie.

4 Existence et résultats sur les limites

4.1 Inégalités

Proposition 12. *Soit une suite (u_n) à termes positifs qui converge vers une limite ℓ, alors $\ell \geq 0$.*

(a). Le rang n_0 dépendant du choix de M.

Corollaire 2. *Soient deux suites (u_n) et (v_n) qui convergente vers ℓ et ℓ' et satisfaisant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n,$$

alors on a $\ell \leq \ell'$.

Remarque: Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles deviennent large par passage à la limite.
Les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = -\frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

convergent toutes les 2 vers 0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < v_n$.

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) satisfaisant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n,$$

et les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Proposition 13. *Soient deux suites (u_n) et (v_n) satisfaisant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n,$$

et la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4.2 Suites monotones

Proposition 14. *Soit une suite (u_n) croissante majorée, alors la suite (u_n) converge vers la limite ℓ, où*

$$\ell = \sup \{u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Remarques:

1. Cette proposition s'adapte aussi au cas d'une suite décroissante minorée.
2. Dans la pratique, on prouve souvent la monotonie de la suite (u_n) et son caractère borné pour prouver la convergence et cela permet dans un second temps de déterminer la limite par un passage à la limite (que l'on justifiera) dans les égalités intervenant dans la définition de la suite. (Exemple : cf. preuve du théorème des suites adjacentes)

Corollaire 3. *Soit une suite (u_n) monotone, alors la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ ou diverge vers $+\infty$.*

Proposition 15 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient 2 suites (u_n) et (v_n) avec (u_n) suite croissante et (v_n) suite décroissante tel que $\lim\limits_n u_n - v_n = 0$ alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.*

4.3 Suites extraites

Définition 4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites, on dit que la suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n), si il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Remarque : On vérifiera qu'une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Lemme 1. *Si la suite (u_n) converge vers ℓ, toute suite extraite de la suite (u_n) converge vers ℓ.*

Remarque : On se sert en général plutôt de cette proposition pour montrer qu'une suite ne converge pas. Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, car les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont des limites différentes.

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (u_n) une suite bornée, alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge.*

5 Généralisation aux suites à valeurs complexes

5.1 Définition

Soient une suite (z_n) de nombres complexes et un nombre complexe α, on dit la suite (z_n) converge vers α, si les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$ convergent vers $\mathrm{Re}(\alpha)$ et $\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

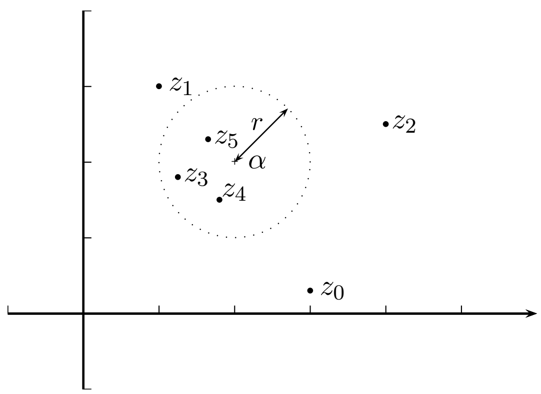
5.2 Propriétés

Proposition 16. *Soient une suite (z_n) de nombres complexes et un nombre complexe α, il y a équivalence entre*

(i) La suite (z_n) converge vers α.

(ii) La suite réelle (u_n) définie par $u_n = |z_n - \alpha|$ converge vers 0.

Remarque: *Cela s'interprète géométriquement, le nombre u_n étant la distance entre le point d'affixe z_n et le point d'affixe α. Pour tout rayon $r > 0$, à partir d'un certain rang les termes de la suite (z_n) sont dans le disque de centre α et de rayon r.*



Le caractère borné des suites convergentes et les règles sur opérations algébriques sur les limites énoncés dans le cas des suites réelles restent valable sur les suites complexes :

Proposition 17. *Si la suite (z_n) converge, alors la suite (z_n) est bornée. (au sens la suite $(|z_n|)$ est bornée.)*

Proposition 18. *Soient 2 suites (z_n) et (w_n) qui convergent ver ℓ_1 et ℓ_2 et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a*

(i) La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

(ii) La suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell_1$.

(iii) La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell_1 \ell_2$.

(iv) Si $\ell_1 \neq 0$ et $\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0\Big)$, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell_1}$.

(v) Si $\ell_1 \neq 0$ et $\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0\Big)$, alors la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell_2}{\ell_1}$.

(vi) La suite $(\overline{u_n})$ *converge vers* $\overline{\ell_1}$.

Par contre toutes les règles de convergence faisant intervenir la relation d'ordre ne sont pas conservées, le corps des nombres complexes n'ayant pas de relation d'ordre compatible avec les opérations algébriques.

6 Comparaison des suites

6.1 Définitions

Soient (u_n) et (v_n) 2 suites, on suppose que la suite (v_n) n'a pas de terme nul. On dit que

1. La suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée. On note cette propriété $u_n \underset{n}{=} O(v_n)$.
2. La suite (u_n) est négligeable par rapport à la suite (v_n), si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers 0. On note cette propriété $u_n \underset{n}{=} o(v_n)$.
3. La suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n), si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers 1. On note cette propriété $u_n \underset{n}{\sim} v_n$.

Remarque:
Le fait que la suite (v_n) n'a pas de terme nulle peut être remplacé par « La suite (v_n) n'a pas de terme nul à partir d'un certain rang. »

6.2 Propriétés

Proposition 19 (Comparaisons usuelles)**.** *Pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\rho > 1$*, on a*

$$\begin{array}{c|c} (\ln(n))^\alpha \underset{n}{=} o(n^\beta) & \rho^n \underset{n}{=} o(n!^\alpha) \\ n^\alpha \underset{n}{=} o(\rho^n) & n! \underset{n}{=} o(n^n) \\ n^\alpha \underset{n}{=} o(e^{n\beta}) & \end{array}$$

Remarque: En dehors, des comparaisons faisant intervenir $n!$, ces résultats ont été démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

Proposition 20 (Opérations sur les équivalents)**.** *Soit 3 suites* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *et* α *un nombre réel non nul, on a :*

1. *Équivalence entre* $\lim_n u_n = \alpha$ *et* $u_n \underset{n}{\sim} \alpha$.
2. *Si* $u_n \underset{n}{\sim} v_n$*, alors* $u_n w_n \underset{n}{\sim} v_n w_n$.
3. *Si* $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque:
Les produits d'équivalents sont autorisés, on ne peut par contre pas sommer des équivalents et ni les composer. On peut seulement les multiplier et les mettre à une puissance indépendante de n.

$$\text{« On a } \left(1 + \tfrac{1}{n} \underset{n}{\sim} 1\right)\text{, or } (1+\tfrac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \text{ n'est pas équivalent à } 1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\text{ »}$$

$$\text{« On a } \left(1 + \tfrac{1}{n} \underset{n}{\sim} 1\right) \text{ et } \left(-1 \underset{n}{\sim} -1 - \frac{3}{n}\right)\text{, } (1 + \tfrac{1}{n} - 1) = \tfrac{1}{n} \text{ n'est pas équivalent à } 1 - 1 - \tfrac{3}{n} = -\tfrac{3}{n}.\text{ »}$$

Proposition 21 (Simplification des termes d'erreurs d'approximation)**.** *Soient 3 suites* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *et* λ *un nombre réel non nul, on a*

1. Si $u_n \underset{n}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n}{=} o(w_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n}{=} o(w_n)$.

2. Si $u_n \underset{n}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n}{=} o(\lambda w_n)$.

3. Si $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n}{=} o(v_n)$, alors $w_n \underset{n}{=} o(u_n)$.

Exemples:

1. Ces règles servent pour simplifier les expressions, on a :

$$\text{« } u_n \underset{n}{=} o(n^2) \text{ est plus simple que } u_n \underset{n}{=} o((4n-3)^2). \text{ »}$$

2. Elles permettent aussi de regrouper les termes d'erreurs :

$$\text{« Si } u_n \underset{n}{=} o(n^2) \text{ et } v_n = n, \text{ alors } u_n + v_n \underset{n}{=} o(n^2). \text{ »}$$

Proposition 22 (Calcul d'équivalent)**.** *Soient 3 suites (u_n), (v_n) et (w_n), on a*

1. Si $u_n \underset{n}{=} o(v_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n}{\sim} v_n$.

2. Il y a équivalence entre

(a) $u_n \underset{n}{\sim} w_n$

(b) La suite (α_n) définie par $\alpha_n = u_n - w_n$ vérifie $\alpha_n \underset{n}{=} o(w_n)$ et on a $u_n = w_n + \alpha_n$.

(c) La suite (ϵ_n) définie par $\epsilon_n = \frac{u_n - w_n}{w_n}$ tend vers 0 et on a $u_n = w_n(1+\epsilon_n)$.

Exemples:

1. La première règle permet de calculer des équivalents simples rapidement

$$\text{« Si } \lim_n u_n = +\infty, \text{ alors } u_n + \ln u_n \underset{n}{\sim} u_n \text{ et } e^{u_n} + u_n \underset{n}{\sim} e^{u_n} \text{ »}$$

2. La seconde permet de contourner l'interdiction des compositions d'équivalents :

(a) Si $u_n \underset{n}{\sim} w_n$ et que l'on composer par le logarithme, on écrit $u_n = w_n(1+\epsilon_n)$ (point (c) des équivalences du 2. et on a alors

$$\ln u_n = \ln v_n + \ln(1+\epsilon_n),$$

il ne reste plus qu'à étudier les 2 termes séparément puis les comparer. Le comportement de $\ln(1+u)$ en $u=0$ est bien connu (cf. développements limités usuels).

(b) Si $u_n \underset{n}{\sim} w_n$ et que l'on composer par l'exponentielle, on écrit $u_n = w_n + \alpha_n$ (point (b) des équivalences du 2. et on a alors

$$e^{u_n} = e^{v_n} e^{\alpha_n},$$

il ne reste plus qu'à étudier les 2 termes séparément puis les multiplier. Soit $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et le comportement de e^u en $u=0$ est bien connu (cf. développements limités usuels), soit on cherche un équivalent de α_n pour pourvoir réitérer le procédé.

6.3 Suites implicites

Les suites implicites sont le plus souvent définies à partir d'une suite d'équation (E_n), on justifie l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation (E_n). Fréquemment, on étudiera ensuite le comportement de la suite (x_n) et la question d'un développement asymptotique de la suite pourra parfois enchainer. Les exemples suivants ne sont pas à apprendre, ils sont seulement là pour illustrer quelques méthodes.

6.3.1 Première exemple :

Soit la suite d'équations (E_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 2 \quad (E_n).$$

Montrons que l'équation (E_n) admet une unique solution positive que l'on notera x_n et étudions la convergence de la suite (x_n) :

1. **Existence et unicité :**
   Une méthode fréquente est de poser une fonction auxiliaire et de l'étudier ici la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par
   $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k - 2 = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1.$$
   On l'étudie les variations de f_n. On a ici $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$ pour $x > 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (On peut aussi remarquer que la fonction f_n est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes). On en déduit

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   Comme la fonction f_n est continue et strictement croissante et $0 \in [-1, +\infty[$, le théorème de la bijection nous permet de conclure qu'il existe un unique réel x_n tel que $f_n(x_n) = 0$. L'équation (E_n) admet donc une unique solution x_n.
2. **Convergence :**
   Une méthode pour justifier une convergence est d'étudier la monotonie de la suite (x_n) soit de comparer x_n et x_{n+1}.
   On injecte la valeur x_n dans la fonction auxiliaire f_{n+1}. On a $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et
   $$f_{n+1}(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} x_n^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} x_n^k - 1 + x_n^{n+1} = f_n(x_n) + x_n^{n+1} = x_n^{n+1} > 0$$
   Comme f_{n+1} est croissante et que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, la suite (x_n) est décroissante et minoré par 0, donc elle converge vers une limite finie ℓ.
   Calculons les premiers termes de la suite (x_n).
   On a $1 + x_1 = 1$ donc $x_1 = 1$.
   Puis $1 + x_2 + x_2^2 = 2$, soit $x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme $x_2 > 0$, on a donc $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   On a donc pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $x_n \neq 1$. La somme des termes d'une suite géométrique est
   $$f_n(x_n) = \frac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n} - 2.$$

Or comme $0 < x_n \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a $0 < x_n^{n+1} \leq \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, comme $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ par passage à la limite en utilisant le théorème des gendarmes, on conclut que $x_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a, par passage à la limite,

$$0 = f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\ell} - 2.$$

On en déduit que $\ell = \frac{1}{2}$ et on conclut que $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$

6.3.2 Deuxième exemple :

Soit la suite d'équations (E_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$x + \ln x = n.$$

Montrons que l'équation (E_n) admet une unique solution positive que l'on notera x_n et déterminons un développement asymptotique à 3 termes (x_n).

1. **Existence et unicité :** La fonction f définie par $f(x) = x + \ln x$ est continue et strictement croissante et on a

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   Le théorème de la bijection permet de conclure directement à l'existence et et l'unicité du x_n tel que $f(x_n) = n$.

2. **Comportement asymptotique :**
   Comme $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$, la croissance de f permet de conclure directement à la croissance de la croissance (x_n). Comme la suite (x_n) est monotone, elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si elle convergeait vers une limite finie ℓ, on aurait pour tout n $x_n \leq \ell$ et par croissance de f, $n = f(x_n) \leq f(\ell)$, ce qui est contradictoire. La suite (x_n) diverge vers $+\infty$. On en déduit que $\ln(x_n) = \underset{n}{o}(x_n)$ et donc $x_n + \ln(x_n) \underset{n}{\sim} x_n$. En utilisant (E_n), on obtient donc $n = x_n + \ln(x_n) \underset{n}{\sim} x_n$, soit $\boxed{x_n \underset{n}{\sim} n.}$ Pour le deuxième terme du développement, on pose $x_n = n + u_n$, on a $u_n = \underset{n}{o}(n)$ et on obtient, en réinjectant dans (E_n)

$$u_n + \ln(n + u_n) = 0.$$

   Comme $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il en résulte $u_n = -\ln n - \underbrace{\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.
   Comme $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $u_n \underset{n}{\sim} -\ln n$, puis

$$x_n = n - \ln n + \underset{n}{o}(\ln n).$$

   Si on pose $x_n = n - \ln n + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \underset{n}{o}(\ln(n))$, on obtient en réinjectant à nouveau dans (E_n) :

$$-\ln(n) + \alpha_n + \ln(n - \ln(n) + \alpha_n) = 0,$$

soit

$$\alpha_n = -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\right).$$

Comme $\alpha_n \underset{n}{=} o(\ln n)$, on a : $-\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \underset{n}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\cdot$ Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a donc

$$\alpha_n = -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\right) \underset{n}{\sim} -(-\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}) \underset{n}{\sim} \frac{\ln(n)}{n},$$

on conclut donc

$$\boxed{x_n = n - \ln(n) + \tfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$