Séries numériques

1 Convergence de séries

Exercice 1. Soit $u_n = a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+3}$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur (a,b,c) pour que $\displaystyle\sum_n u_n$ soit convergente.

Exercice 2. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^x}{2^n}$ est-elle convergente ? Et (pour $x > 0$) $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 x^{-n}$?

Exercice 3. $\star$ Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} e^{-nt^2}\,dt$?

Exercice 4. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(n^{1/n} - (n+1)^{1/(n+1)}\right)^\alpha$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$?

Exercice 7. Nature des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ et $v_n = \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$.

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature des séries de terme général $u_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ et $v_n = \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6}$.

Exercice 9. Étudier la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{n}$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*_+)$. On suppose : $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

— si $l > 0$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ diverge ;
— si $l < 0$, alors cette série converge ;
— si $l = 0$, alors... on ne peut rien dire !

Exercice 11. Pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^2\cos(nx)}{x^2+n^2}$ est-elle convergente ?

Exercice 12. On pose, pour $n \neq p$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$, et $a_{n,n} = 0$. Comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$.

Exercice 13. ⋆⋆ La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n^2\right)$ est-elle convergente ?

2 Calcul de somme

Exercice 14. Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que le série de terme général $\frac{u_n}{n(n+1)(n+2)}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 16. Justifier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Exercice 17.

Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{-1}$.

(On pourra utiliser le développement asymptotique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$*)*

3 Comportement asymptotique

Exercice 18. ⋆

Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = n\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\ln k)^2}{k^2}\right)$.

Exercice 19. Déterminer des équivalents simples des suites définies par les expressions suivantes

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, $\alpha \geq -1$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(\ln(k))^\alpha}$, $\alpha \leq 1$.
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ln(k)$

Exercice 20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^\alpha}{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k}$.

Exercice 21.

1. Donner la nature de $\sum \frac{\ln n}{n}$.

2. Montrer que $S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$.
3. Montrer que $S_n - \frac{\ln^2 n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.

Exercice 22. Déterminer un développement asymptotique à deux termes significatifs de la suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{n}{n+1}$.

Exercice 23.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} n^{\beta}.$$

1. Etudier la convergence et la convergence absolue de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n^\alpha}$.
2. Calculer la valeur de la série pour $(\alpha, \beta) \in \{(1,1); (1/2,3); (1,3); (1,2)\}$.

Exercice 24. $\star\star$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives, montrer que

1. Si la suite (u_n) converge vers $\ell \neq 0$, montrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et la série de terme général u_n diverge alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 25. $\star$ Soit u une suite telle que $u_0 \in]0, \pi[$, et $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que u converge.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 26. $\star$Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 > 0$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Indications

Exercice 25 : Passer par des ϵ.

Exercice 26 : Utiliser l'exercice 24 pour calculer l'équivalent.

Exercice 27 : Utiliser l'exercice 24 pour calculer l'équivalent.