Polynômes

Exercice 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1 Equation fonctionnelle :

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a + b \neq 0$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X + a) + P(X + b) = 2P(X)$$

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

1. $X(X + 1)P'' + (X + 2)P' - P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(2X) = P'(X)P''(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$P(X^2) = P(X + 1)P(X).$$
2. $\star$ [X PC 2020]
Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$P(X^2 + X + 1) = P(X + 1)P(X).$$
3. $\star\star\star$ Soit $a, b \in \mathbb{C}[X]$
Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$P(X^2 + aX + b) = P(X + 1)P(X).$$

2 Division euclidienne

Exercice 5. Effectuer les divisions euclidiennes de A par B dans les anneaux précisés :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$, dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $A = iX^3 - X^2 + (1 - i)$, $B = (1 + i)X^2 - iX + 3$, dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 6. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

Déterminer le reste de la division euclidien de P par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 7. Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, quel est le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$, dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 8. Soient $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

3 Divisibilité

Exercice 9. Trouver tous les $a \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = X^5 + 1$,

$$P_n = (X^4 - 1)(X^3 - X^2 + X - 1)^n + (X + 1)X^{4n-1}.$$

Montrer que A divise P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 12. Calculer le pgcd de P et Q pour :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$, $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$, $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$, $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$.

Exercice 13. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tels que $P(X)+1$ est multiple de $(X-1)^n$ et $P(X)-1$ est multiple de $(X+1)^n$.

4 Relations coefficients-racines

Exercice 14.

On considère le polynôme $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + 1$.

1. Calculer la somme des carrés des zéros de P dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire que les zéros de P ne sont pas tous réels.

Exercice 15. Résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 1 \\ \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} & + & \frac{1}{c} & = & -1. \end{array}\right.$$

5 Dérivation :

Exercice 16. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(0) = 1, \; P(1) = 0, \; P'(0) = 0, \; P'(1) = 1$$

Exercice 17. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*, (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est un zéro double de $P^2 + \lambda Q^2$, montrer que $PQ' - P'Q$ s'annule en a.

Exercice 18. Soit P un polynôme de degré n possédant n racines réelles distinctes. Montrer pour tout entier k, $P^{(k)}$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \in \mathbb{Z}.$$

6 Factorisation et racines :

Exercice 20. Factoriser en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$P = X^4 + X^2 + 1 \qquad\qquad Q = (X^2 - X + 1)^2 + 1$$

Exercice 21.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X^k$. Décomposer P_n en produit de polynômes irreductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Exercice 22.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, montrer que $\frac{P}{P \wedge P'}$ est scindé à racines simples et que ses racines sont exactement les racines de P.

7 Suites de polynômes :

Exercice 23. [Polynômes de Laguerre] Pour $n \in \mathbb{N}$, L_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right)$.

Montrer que L_n est une fonction polynomiale, dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le coefficient du monôme de degré 0.

Exercice 24. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

   (*On déterminera une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.)*
2. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. $\star$ Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. (*On pourra utiliser le théorème de Rolle et sa version généralisée à l'infini.)*
4. En calculant le développement en élément simple

$$\frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i},$$

   retrouver le résultat de la question 3.

8 Majoration et localisation de racines :

Exercice 25.

Soient $M \in \mathbb{R}^+$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \leq M$. Montrer que

$$|a_k| \leq M.$$

(Si $n = \deg P$, on pourra calculer $\sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_{n+1}} P(\omega)$.)

Exercice 26. $\star$

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|a_k| < M$. Soit $P = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$. Montrer que P n'a aucun zéro dans le disque ouvert de centre O et de rayon $\dfrac{1}{1+M}$.