Nombres complexes

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Définition

On construit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ en introduisant l'objet noté i tel que $i^2 = -1$, on a alors

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib \quad ; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Soit $z = a+ib$ un élément de $\mathbb{C}$, on appelle partie réel de z noté $\mathrm{Re}(z)$ le nombre réel a (respectivement partie imaginaire de z noté $\mathrm{Im}\,(z)$ le nombre réel b).

On identifie les nombres réels aux éléments $\mathbb{C}$ de partie imaginaire nulle par la bijection canonique

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{a + i0 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & a + i0. \end{array}$$

1.2 Opérations

On étend les opérations usuels d'addition et multiplication sur $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, par

$\forall z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$,

(i) $-z_1 = (-a_1) + i(-b_1)$

(ii) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

(iii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$

Les lois de compositions ainsi définies sont commutatives.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ et } z_1z_2 = z_2z_1$$

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, \quad (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3 \text{ et } z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

L'addition (respectivement la multiplication) admet un élément neutre $0 = 0 + i0$ (respectivement $1 = 1 + i0$), car

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad 0 + z = z + 0 = z \text{ et } 1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

Tout nombre complexe non nul ($z = a + ib$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$) admet un inverse

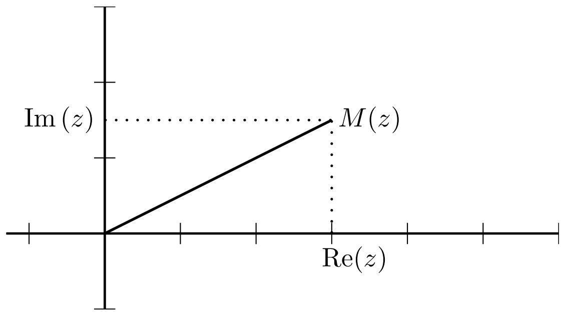
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

On vérifie aisément que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \mathrm{Re}(\lambda z_1) = \lambda \mathrm{Re}(z_1).$$

1.3 Représentation géométrique

Dans un repère orthonormée directe du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on identifie les coordonnées du (x, y) d'un point M au complexe $z = x + iy$. Le complexe z est appelé affixe du point M et on a $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$.

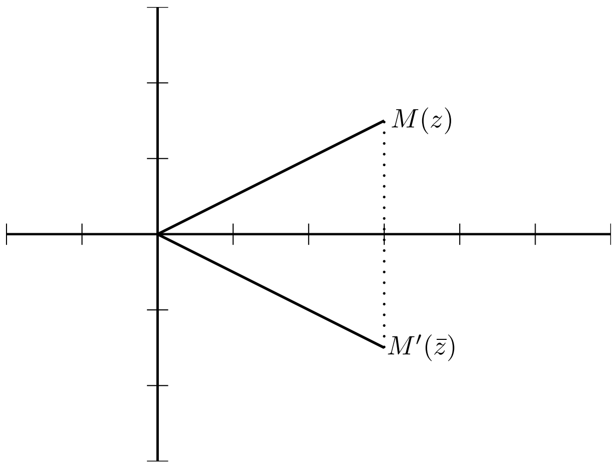


On identifie ainsi le plan et le corps $\mathbb{C}$.

1.4 Conjugaison

1.4.1 Définition

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le nombre complexe $a - ib$ noté $\bar{z}$ appelé conjugué de z. Si M est le point d'affixe z, alors le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



1.4.2 Propriétés

Lemme 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \text{ et } z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z).$$

Proposition 1. *Pour tout nombre complexe z, on a les 2 équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} z = \bar{z} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Im}\,(z) = 0 \\ z = -\bar{z} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Re}(z) = 0 \end{array}$$

Un nombre complexe vérifiant la première (respectivement la seconde) propriété est un nombre réel (respectivement un imaginaire pur).

Proposition 2. *Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z_2}.$$

2 Module, argument et forme exponentielle d'un nombre complexe

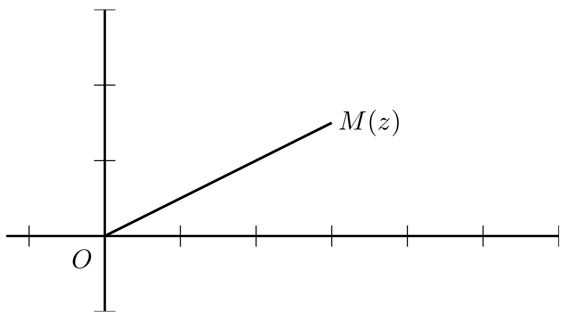
2.1 Module

2.1.1 Définition

Soit $z = a + ib$, on définit le module de z noté $|z|$ par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'un point de vue géométrique, c'est la longueur du segment reliant l'origine du repère O et le point M d'affixe z.



2.1.2 Propriétés

Proposition 3. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a*

(i) $|z_1| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$

(ii) $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$, $|z_1| = |\overline{z_1}|$ *et* $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(iii) $|\mathrm{Re}(z_1)| \leq |z_1|$ *avec égalité si et seulement si* $\mathrm{Im}\,(z_1) = 0$

(iv) $|\mathrm{Im}\,(z_1)| \leq |z_1|$ *avec égalité si et seulement si* $\mathrm{Re}(z_1) = 0$.

Remarque :

La formule reliant le module d'un produit et le produit des modules sert couramment en pratique pour déterminer le module d'un quotient de nombres complexes. On cherche rarement à expliciter la partie réelle et la partie imaginaire du quotient, si on a besoin seulement du module.

Exemple :

$$\left|\frac{2+i}{3+i}\right| = \frac{|2+i|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Corollaire 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$, on a*

(i) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

(ii) $|z| = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Remarque :

La première formule sert couramment en pratique pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un quotient de nombres complexes.

Exemple :

$$\frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{7+i}{10}$$

On a donc $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2+i}{3+i}\right) = \dfrac{7}{10}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2+i}{3+i}\right) = \dfrac{1}{10}$.

Proposition 4 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, on a*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,,$$

l'inégalité de droite étant une égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou si $\frac{z_2}{z_1}$ est un réel positif.

Preuve :

Montrons l'inégalité de droite.

On peut traiter directement le cas $z_1 = 0$, les inégalités deviennent des égalités et le cas d'égalité est vérifié.

Si $z_1 \neq 0$, on peut donc diviser par $|z_1| > 0$ et on a alors à démontrer

$$\left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \leq 1 + \left|\frac{z_2}{z_1}\right|,$$

soit en posant $u = \frac{z_2}{z_1}$,

$$|1 + u| \leq 1 + |u|\,.$$

Comme les termes sont positifs, cela revient à démontrer

$$|1 + u|^2 \leq (1 + |u|)^2\,,$$

soit

$$(1 + u)(1 + \overline{u}) \leq 1 + 2\,|u| + |u|^2\,.$$

puis après développement

$$1 + u + \overline{u} + u\overline{u} \leq 1 + 2\,|u| + |u|^2\,,$$

d'oô après simplification

$$\mathrm{Re}(u) \leq |u|\,.$$

Or grâce à la proposition **??**, $|\mathrm{Re}(u)| \leq |u|$, donc l'inégalité est vérifiée.

De plus, une condition nécessaire d'égalité est que u soit réel et il faut alors $u = |u|$, d'où $u = \frac{z_2}{z_1}$ réel positif.

Pour l'inégalité de gauche, on utilise celle de droite et le fait que $z_1 = z_1 + z_2 - z_2$, d'où

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|\,,$$

soit

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \text{ et, par symétrie des rôles de } z_1 \text{ et } z_2,\ |z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|\,,$$

on conclut donc bien $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Remarques :

(a) L'inégalité triangulaire est la forme analytique de la propriété **« le côté d'un triangle est de longueur inférieur à la somme des longueurs des 2 autres côtés. »**

(b) La "formule" $a = a + b - b$ utilisée ici est une méthode fréquemment appliquée pour démontrer des inégalités et égalités dans de nombreux chapitres (On l'a déjà utilisé dans la démonstration de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.).

2.2 Argument et forme exponentielle d'un nombre complexe

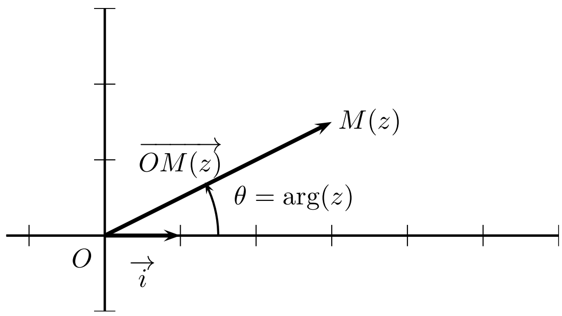
2.2.1 Définitions

Soit z un nombre complexe de module 1, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$, celui-ci est unique, si on le définit à 2π-près. C'est-à-dire si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ vérifient $z = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$, alors $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$ avec k un nombre entier.

On appelle argument de z un tel nombre θ et on note $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$. En général, on abrégera par $\arg(z) = \theta$, mais il faut toujours faire attention au 2π-près. On choisira souvent un représentant de l'argument dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ (ou $[0, 2\pi[$), on a alors unicité de ce représentant.

On étend la définition d'argument à complexe z non nul par $\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$.

Géométriquement si z est l'affixe du point $M(z)(\neq O)$, l'argument est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



On définit alors la forme exponentielle (ou forme trigonométrique) d'un nombre complexe z par

$$z = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$, $\theta = \arg z$ et $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

2.2.2 Propriétés

Proposition 5. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*(= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

(i) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(ii) $\arg(\frac{1}{z_1}) = -\arg(z_1)$

(iii) $\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1)$

(iv) $\arg(z_1^n) = n\arg(z_1)$.

(v) si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ sont des formes exponentielles, alors $z_1 z_2$ a pour forme exponentielle $r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Exemple : Déterminons la forme trigonométrique de $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$, on a

$$|z| = \frac{|-4|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{4}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = 2,$$

puis

$$\arg z = \arg(-4) - \arg(1+i\sqrt{3}) = \pi - \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

On conclut

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Proposition 6. ⋆ *Soit l'ensemble des nombres complexes de module 1 noté $\mathbb{U}$, c'est un sous-groupe multiplicatif du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ et l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ définie par $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ muni de l'addition dans $\mathbb{U}$ muni de la multiplication.*

Explications : L'ensemble $\mathbb{U}$ muni de la loi de multiplication est une sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ car

(i) $\mathbb{U}$ est non vide, il contient le nombre 1.

(ii) $\mathbb{U}$ est stable par multiplication : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}$, $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$

(iii) $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse : $\forall z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

L'application φ est

(i) un morphisme de groupes car "il transporte la première loi de composition sur la seconde" :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\theta_1 + \theta_2) = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$$

(ii) surjective, car tout élément de $\mathbb{U}$ admet un antécédent : $\forall z \in \mathbb{U}, \exists \theta, \quad \varphi(\theta) = z$.

Corollaire 2. *L'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$ définie par*

$$\varphi(\theta) = e^{i\theta}$$

est paramétrisation du cercle unité du plan complexe.

Proposition 7 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer le module et l'argument de $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$. On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + 1 &= (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \\ e^{i\theta} - 1 &= (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $\left|e^{i\theta} + 1\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ et $\left|e^{i\theta} + 1\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

Puis pour l'argument, on a

$$\begin{aligned} \arg\left(e^{i\theta} + 1\right) &= \arg(2) + \arg\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \arg\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \arg\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\theta}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{\theta}{2} & \text{si } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \\ \frac{\theta}{2} + \pi & \text{si } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0 \\ \text{non défini} & \text{si } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\arg\left(e^{i\theta}-1\right) &= \arg(2i)+\arg\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\arg\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}+\arg\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\frac{\theta}{2}\\
&= \begin{cases} \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2} & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0\\ \frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2} & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)<0\\ \text{non défini} & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Proposition 8 (Formule de Moivre)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=e^{in\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

Proposition 9. *On étend la définition de l'exponentielle à tout complexe $z=a+ib$, en posant*

$$e^z=e^a e^{ib}.$$

où e^a est l'exponentiel usuel d'un nombre réel a et e^{ib} l'exponentiel d'un imaginaire pur défini dans ce chapitre. L'exponentiel complexe est une application sujective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

La propriété de transformation des sommes en produits est conservée :

$$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C},\quad e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}.$$

De plus, on a $e^{z_1}=e^{z_2}$, si et seulement si $z_1-z_2\in 2i\pi\mathbb{Z}=\{2ik\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.

3 Applications des complexes à la trigonométrie

En dehors du formulaire qu'il faut soit connaître par coeur soit retrouver la formule dont on a besoin en un temps raisonnable, le reste de cette partie est un ensemble d'outil à connaître et à savoir adapter au problème posé, il ne faut en aucun cas apprendre les formules par coeur.

3.1 Formulaire trigonométrique

En partant de la formule $e^{i(a+b)}=e^{ia}e^{ib}$ et des définitions de l'exponentielle complexe et des fonctions trigonométriques, on retrouve le formulaire usuel (cf. le cours sur les fonctions usuelles).

A titre d'exercice d'entraînement, le reconstruire.

3.2 Transformation produits-sommes

3.2.1 Linéarisation

La transformation de produit de fonctions trigonométriques en combinaison linéaires de fonctions trigonométriques est nécessaire dans de nombreux problèmes (calcul de primitives, somme de fonctions trigonométriques)

La méthode général est de linéariser en utilisant les formules d'Euler. Soit l'expression $\cos^p x\sin^q y$, on la transforme, développe et simplifie, grâce à la formule

$$\cos^p x\sin^q y=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)^q.$$

Exemple :

Calculons une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \cos^3(2x)\sin(3x)$. On a

$$\begin{aligned}
\cos^3(2x)\sin(3x) &= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{6ix}+3e^{2ix}+3e^{-2ix}+e^{-6ix}\right)\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)\\
&= \frac{1}{16i}\left(e^{9ix}+3e^{5ix}+3e^{ix}+e^{-3ix}-e^{3ix}-3e^{-ix}-3e^{-5ix}-e^{-9ix}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\sin(9x)+3\sin(5x)-\sin(3x)+3\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

On a donc que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{72}\cos(9x) - \frac{3}{40}\cos(5x) + \frac{1}{24}\cos(3x) - \frac{3}{8}\cos(x)$ est une primitive de f.

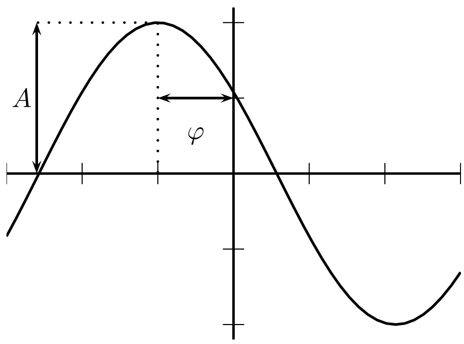
3.2.2 Déphasage

Proposition 10. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ avec $A > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x+\varphi).$$

Remarque :

En physique, la quantité A sera appelée amplitude et φ déphasage.



Exemple :

Résoudre $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right)\\
&= 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

On en déduit $x - \frac{\pi}{3} \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi + \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.2.3 Polynômes de Tchebychev

Proposition 11. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe des polynômes T_n et U_n, tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \quad et \quad \sin(nx) = \sin(x) U_n(\cos(x)).$$

Preuve :

Utiliser la formule de Moivre, le binôme de Newton puis identifier les parties réelles et imaginaires

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(x))^{n-k} (i\sin(x))^k.$$

Remarques :

(a) Pour le moment, il y a seulement l'existence des polynômes, nous verrons plus tard dans l'année que ces polynômes sont uniques.

(b) Le formulaire trigonométrique permet de calculer facilement les premiers polynômes. On a

$$\cos(0 \cdot x) = 1, \quad \cos(1 \cdot x) = \cos(x), \quad \cos(2 \cdot x) = 2\cos^2(x) - 1,$$

d'où

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad T_2 = 2X^2 - 1.$$

On a

$$\sin(0 \cdot x) = 0, \quad \sin(1 \cdot x) = \sin(x), \quad \sin(2 \cdot x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

d'oô

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = 2X.$$

3.2.4 Sommes trigonométriques

Proposition 12. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) &= \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Preuve :

On remarque que les 2 quantités à simplifier sont les parties réelles et imaginaires de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ et comme $e^{ix} \neq 1$, on a, en utilisant les formules d'Euler,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On identifie alors partie réelle et partie imaginaire.

Remarques :

1. Les formules ne sont pas à apprendre par coeur, il faut savoir refaire le calcul.

2. Il faut faire attention dans les applications aux indices parcourus (Dans certains cas, on commence à $k = 1$. Il arrive que l'on ne parcourt seulement les indices impairs. etc...)
3. Il faudra en général traiter à part le cas $e^{ix} = 1$.
4. Le terme à sommer peut nécessiter quelques manipulations :
   — Linéarisation (exemple : sommer le terme $\sin^2(kx)$.)
   — Séparation des termes (exemple : sommer le terme $(2^k + 1)\cos(kx) = 2^k \cos(kx) + \cos(kx)$)
   — Etc...

Exemple :

Résoudre pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 0$.

On a, en utilisant le binôme de Newton et les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(1 + e^{ix}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}}\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(2^n e^{i\frac{nx}{2}}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\right) \\
&= 2^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

L'équation à résoudre est donc équivalente à

$$\cos\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0,$$

soit

$$\frac{nx}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Les solutions sont donc

$$\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

4 Résolutions d'équations polynomiales

4.1 Équations de degré 2

4.1.1 Racines carrés d'un nombre complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, alors $z^2 = a$ a deux solutions distinctes opposées.

2 méthodes :

a. **Utilisation de la forme cartésienne des nombres complexes :**
   On pose $z = x + iy$ et on a alors

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a_1 + ia_2.$$

   On identifie et on obtient $\begin{cases} x^2 - y^2 = a_1 \\ 2xy = a_2. \end{cases}$ De plus, on a $|z|^2 = |a|$, soit $x^2 + y^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
   On en déduit $2x^2 = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \geq 0$, on obtient donc une ou deux solution(s) pour x et l'équation $2xy = a_2$ nous permet de déterminer 2 couples (x, y) solutions opposées, d'où 2 possibilités pour z.

b. **Utilisation de la forme exponentielle des nombres complexes :**
On pose $z = re^{i\theta}$ et on a alors
$$r^2 e^{2i\theta} = r_a e^{i\theta_a}.$$

Par identification, on a
$$\begin{cases} r^2 = r_a \\ 2\theta \equiv \theta_a [2\pi] \end{cases}.$$

Soit comme le module d'un nombre complexe est positif, $r = \sqrt{r_a}$ et $\theta \equiv \frac{\theta_a}{2}[\pi]$.

Il y a donc bien 2 solutions : $\sqrt{r_a}e^{i\frac{\theta_a}{2}}, \sqrt{r_a}e^{i\left(\frac{\theta_a}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r_a}e^{i\frac{\theta_a}{2}}$.

Exemple :

Calculer les racines carrés de $1+i$ de 2 manières et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Calculons les racines en utilisant la représentation cartésienne $z = x + iy$, on a donc
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

On a donc x et y de même signe et $2x^2 = 1 + \sqrt{2}$, soit
$$x = \epsilon\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ et } y = \frac{1}{2x} = \epsilon\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} = \epsilon\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}},$$
où $\epsilon = \pm 1$. L'ensembles des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right\}.$$

Calculons les racines en utilisant la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on a donc
$$z^2 = r^2 e^{2i\theta} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit que
$$\mathcal{S} = \left\{\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, -\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}\right\}.$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on peut relier les 2 formes des solutions et on a donc
$$\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}},$$
soit, par identification des parties réelles
$$\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}.$$

4.1.2 Trinôme du second degré

Soit résoudre une équation de la forme
$$az^2 + bz + c = 0, \text{ avec } a \neq 0.$$

Par réduction à la forme canonique, on a

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0,$$

soit

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

et il ne reste plus qu'à résoudre $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

4.1.3 Relations coefficients-racines

Proposition 13. *Soit l'équation*

$$az^2 + bz + c = 0, \text{ avec } a \neq 0, \quad (E)$$

alors il y a équivalence entre

(i) z_1 et z_2 sont les 2 seules racines de (E) (le cas d'une racine double est $z_1 = z_2$)

(ii) $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

4.2 Racines n-ème d'un nombre complexe

4.2.1 Racines de l'unité

Soit un entier $n \geq 1$, l'équation

$$z^n = 1$$

possède exactement n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ et l'ensemble des solutions noté $\mathbb{U}_n$ est

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}; 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Preuve :

Pour montrer que $\mathbb{U}_n$ est bien l'ensemble des solutions, procédons par analyse-synthèse :

Analyse :

Soit $z = re^{i\theta}$ une solution avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a alors $r^n e^{in\theta} = 1$, par identification module-argument, on obtient

$$\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

On en déduit $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec k entier. Comme $\theta \in [0, 2\pi[$, on a de plus $k \in [0, n[$, soit $k \in [0, n-1]$.

Synthèse :

On vérifie que $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$.

Pour le caractère distinct, soient $k, k' \in [0, n-1]$ tel que $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$, on a alors

$$\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n}[2\pi],$$

d'où

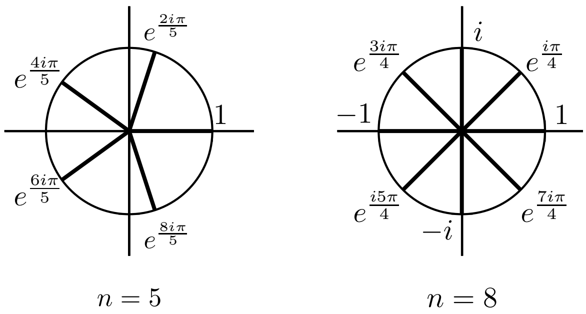
$$k - k' \equiv 0[n].$$

On a donc n divise $k-k'$ et les inégalités $0 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq k' \leq n-1$ donnent $1-n \leq k-k' \leq n-1$. L'intervalle $[1-n, n-1]$ ne contient qu'un entier divisible par n, le nombre 0. On a donc $k-k'=0$. Il y a donc bien n éléments distincts dans $\mathbb{U}_n$.

Représentation géométrique :

La première racine est placée en 1 puis on obtient les suivantes par rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Exemples :



4.2.2 Propriétés

Proposition 14. *Pour $n \geq 2$, on a*

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0.$$

Proposition 15. $\star$ *Pour $n \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ muni de la multiplication est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.*

Explications : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ muni de la loi de multiplication est une sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{U}_n$ car

(i) $\mathbb{U}_n$ est non vide, il contient le nombre 1.

(ii) $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication : $\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{U}_n$, $\omega_1\omega_2 \in \mathbb{U}_n$

(iii) $\mathbb{U}_n$ est stable par passage à l'inverse : $\forall \omega \in \mathbb{U}_n$, $\frac{1}{\omega} = \overline{\omega} \in \mathbb{U}_n$.

4.2.3 Racines n-èmes d'un nombre complexe quelconque

Soit un entier $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{C}^*$, l'équation

$$z^n = a$$

possède exactement n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ et si α est une racine, alors l'ensemble des solutions est

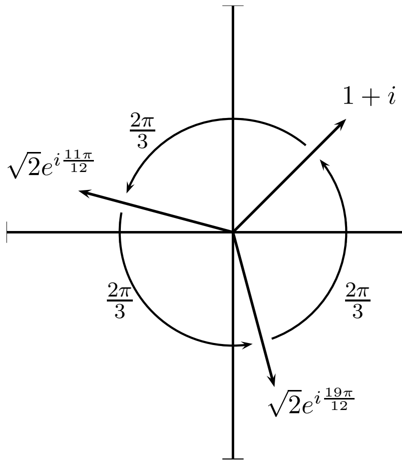
$$\mathcal{S} = \{\alpha\omega; \omega \in \mathbb{U}_n\}.$$

C'est-à-dire, si on une racine, on obtient les autres en multipliant par les racines n-èmes de l'unité, c'est-à-dire géométriquement en faisant des rotations successives d'un angle $\frac{2\pi}{n}$.

Exemple : Soit $z^3 = -2+2i$, on a $z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ racine.

De plus $z^3 = 1$ possède 3 racines $\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ que l'on notera en général en conservant l'ordre $\{1, j, j^2\}$ et on remarquera que $j^2 = \overline{j}$.

Les solutions de $z^3 = -2+2i$ sont donc $\{1+i, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\}$



5 Utilisation des nombres complexes en géométrie plane

5.1 Angles et distances

Soit M_1, M_2 et M_3 trois points distincts d'affixes z_1, z_2, z_3 dans le repère orthonormée directe $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Grâce aux définitions des affixes, du module et de l'argument, on a

(i) $M_iM_j = |z_j - z_i|$

(ii) Le point milieu $I_{i,j}$ du segment $[M_iM_j]$ a pour affixe $\frac{z_i+z_j}{2}$.

(iii) $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \arg(z_2 - z_1)$

(iv) $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{M_1M_3}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$.

On en déduit la proposition suivante

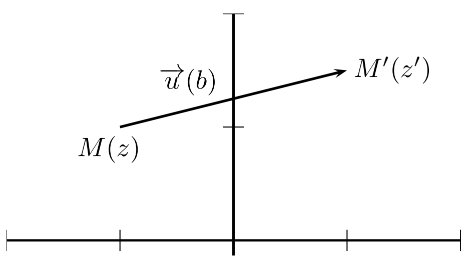
Proposition 16. *Soit avec les mêmes notations que précédemment, on a*

$$\begin{array}{rcl} \text{Les points } M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés.} & \Longleftrightarrow & \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ est un nombre réel.} \\ \text{Les vecteurs } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ et } \overrightarrow{M_1M_3} \text{ sont orthogonaux.} & \Longleftrightarrow & \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \text{ est un imaginaire pur.} \end{array}$$

5.2 Transformation du plan

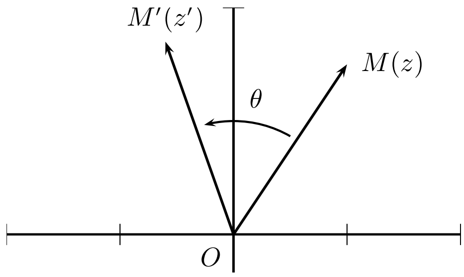
5.2.1 Translations

Soit $b \in \mathbb{C}$, la application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto z + b$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b. Si on note $z' = z + b$, on a

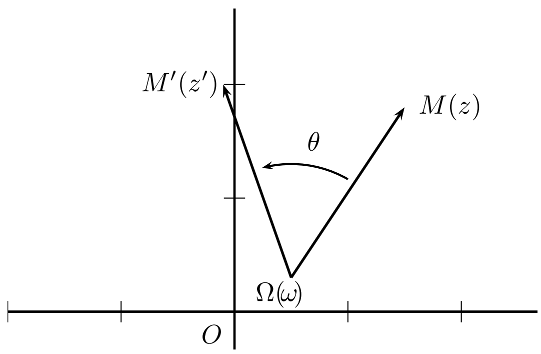


5.2.2 Rotations

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, la application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto e^{i\theta}z$ est une rotation de centre O et d'angle θ. Si on note $z' = e^{i\theta}z$, on a



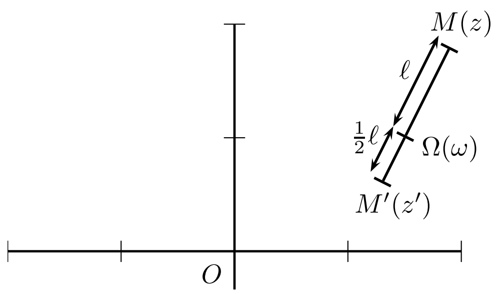
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et $b \in \mathbb{C}$, la application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto e^{i\theta}z + b$ est une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, où ω est l'unique point fixe de l'application $z \mapsto e^{i\theta}z + b$. Si on note $z' = e^{i\theta}z + b$, on a



5.2.3 Homothéties

Soit $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, la application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto kz + b$ est une homothétie de rapport k et de centre $\Omega(\omega)$, où ω est l'unique point fixe de l'application $z \mapsto kz + b$.

Si on note $z' = kz + b$, on a, par exemple, pour $k = -\frac{1}{2}$



5.2.4 Similitudes directes ⋆

Les applications de $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ sont appelés similitudes directes. La composée de 2 similitudes directes est encore une similitude et les similitudes sont des applications bijections dont les réciproques sont aussi des similitudes.

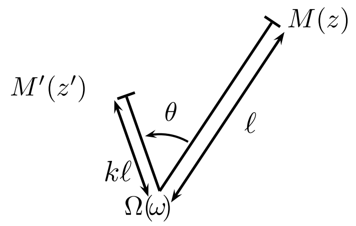
On caractérise la similitude $z \mapsto az + b$ par ses propriétés géométriques :

1. Si $a = 1$:
   C'est un translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b. (cf. infra)

2. Si $a \neq 1$:

   C'est une similitude de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$.

Si on note $z' = az + b$, on a



Les similitudes similitudes conservent les angles (l'angle entre l'images de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le même que celui entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) et les distances sont multipliées par k.