Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1. Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer JMJ.

Exercice 3.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace de* A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. Montrer que pour toutes matrices, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes

$$(a) \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{ccc} x+z & = & 1 \\ y+z & = & 0 \\ x+y & = & 1 \\ 2x+3y & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 5. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x & + & y & + & az & = & 0 \\ \overline{a}^2x & + & \overline{a}y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 6.

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ deux à deux distincts. Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^3x & + & b^3y & + & c^3z & = & d^3 \end{array} \right.$$

Exercice 7.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C(A)$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ AM = MA\}$ appelé le *commutant* de A. Montrer que $C(A)$ est stable par combinaison linéaire.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer le nombre de paramètres définissant $C(A)$.

Exercice 8.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$ (M nilpotente) En étudiant $\sum_{k=0}^{p-1} M^k$, montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
3. Soient A et B 2 matrices carrées qui commutent et B nilpotente, montrer que A et $A+B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 9.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leur inverse.

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants :

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4)\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose que

$$M^2 - (a+b)M + abI_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

1. On suppose $a \neq b$. Calculer M^n en fonction de a, b et n.
2. Traiter le cas $a = b$.
3. On suppose $ab \neq 0$, montrer que M est inversible et exprimer son inverse.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques.