Matrices et applications linéaires

# 1 Matrice d'une application linéaire

**Définitions**

- Soient $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de $F$ et $x$ un vecteur de $F$, on définit le vecteur colonne des coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}_F$ noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(x)$ par $\mathrm{Mat}_{B_F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où $x = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$.

  **Remarques:**

  (a) Si $F = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_F$ est la base canonique, on peut identifier $x$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(x)$, ce n'est plus vrai dés que $\mathcal{B}_F$ est différente de la base canonique.

  (b) On étend pour une famille de vecteurs par $(y_1, \cdots, y_p)$ par

  $$\mathrm{Mat}_{B_F}(y_1, \cdots, y_p) = (y_{ij}),$$

  où $\forall j \in [1, n], \quad y_j = y_{1j} f_1 + \cdots + y_{nj} f_n$.
  La $j$-ème colonne est la décomposition sur la base $\mathcal{B}_F$ du vecteur $y_j$.

  **Exemple:** Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{K}_2[X]$,

  $$\mathcal{F} = \left(1, 1 + X, 1 + X + X^2, X + X^2\right).$$

  On a alors

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  où $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, mais aussi

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  où $\mathcal{B}_1 = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.

- Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et $u$ une application de $\mathrm{L}(E, F)$, on définit la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ par

  $$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = (m_{ij}),$$

  où $\forall j \in [1, p], \qquad u(e_j) = m_{1j} f_1 + m_{2j} f_2 + \cdots + m_{nj} f_n = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} f_k.$

  **Remarque:** La $j$-ème colonne de la matrice $M$ est formée du vecteur colonne des coordonnées de $u(ej)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

**Exemple:** Soient $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \mathbb{K}_2[X]$ et l'application linéaire $\psi$ de $E$ dans $F$ définie par $\psi(P) = P(X+1) - P(X)$, on calcule que dans les bases canoniques la matrice de $\psi$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

# 2 Liens opératoires entre les applications linéaires et les matrices

**Proposition 1.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$, $u$ une application de $\mathrm{L}(E, F)$ et $x$ un vecteur de $E$, alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

**Remarques:**

1. On abrège la formule pour $X$ vecteur colonne de $x$ dans la base $\mathcal{B}_E$, $Y$ vecteur colonne de $y = u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ et $M$ matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, par
$$Y = MX.$$
2. En dimension finie, calculer le noyau d'une application linéaire $u$ se ramène donc à résoudre le système linéaire associée à
$$MX = 0,$$
où $M$ est la matrice de $u$ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, les solutions $X$ donneront les coordonnées des vecteurs du noyau dans la base $\mathcal{B}_E$.

**Proposition 2.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$, l'application*

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathrm{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u). \end{array}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

**Remarques:**

1. Il faut bien noter que les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont ici fixées.
2. Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, étudier l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ devient équivalent à étudier l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Quand $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, par l'isomorphisme réciproque, on associe à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ : $X \mapsto MX$.

**Corollaire 1.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{L}(E, F)$ est de dimension finie et*

$$\dim \mathrm{L}(E, F) = \dim E \dim F.$$

**Remarques:**

1. On en déduit que si $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , l'ensemble des endomorphismes de $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $(\dim E)^2$.
2. On en déduit que si $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie , l'ensemble des formes linéaires $\mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\dim E$ et donc que $E$ et $\mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ sont isomorphes. ($\star$ Cette propriété n'est plus vraie, si $E$ n'est pas de dimension finie.)

**Proposition 3.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \cdots, g_q)$, $u$ une application de $\mathrm{L}(E, F)$ et $v$ une application de $\mathrm{L}(F, G)$, alors on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u).$$

**Remarque:** On abrège la formule par si $M$ et $N$ sont les matrices de $v$ et $u$ dans des bases adaptées alors la matrice de $v \circ u$ dans les bases correspondante est

$$MN.$$

# 3 Matrices inversibles et isomorphismes

**Proposition 4.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie admettant respectivement les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_n)$ et $u$ une application de $\mathrm{L}(E, F)$, alors il y a équivalence entre*

*(i) $u$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .*

*(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible.*

**Remarque:** En utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathrm{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on démontre en particulier que si une matrice carrée $M$ admet une matrice $N$ inverse à droite (ou à gauche), elle est inversible et $M^{-1} = N$.

**Proposition 5** (Matrice de passage)**.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de $E$, on appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, la matrice de l'identité dans les bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}_E$ . C'est-à-dire*

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

*où $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. C'est la matrice dont la $j$-ème colonne est formée des composantes de $e'_j$ dans la base $\mathcal{B}_E$ et on a*

$$P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E).$$

**Remarque:** La $j$-ème colonne de $P$ est le vecteur colonne coordonnée de $e'_j$ dans la base $\mathcal{B}_E$.

**Exemple:** Soient $E = \mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $E$ et $\mathcal{B}_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une autre base, la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_1$ est donc

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(exercice calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_1}(\mathrm{Id}_E)$).

**Proposition 6** (Changement de base)**.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de $E$ et $P$ la matrice passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$, alors si $x$ est un vecteur de $E$ de vecteurs colonnes coordonnées $X$ dans $\mathcal{B}_E$ et $X'$ dans $\mathcal{B}'_E$, on a*

$$X = PX'.$$

**Proposition 7.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$, $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux bases de $F$ et $u$ une application* $\mathrm{L}(E, F)$*, alors on a*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{D}'}(u) & = & \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\mathrm{Id}_F\right)^{-1}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u)\right)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Id}_E\right) \\ & = & \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}\mathrm{Id}_F\right)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u)\right)\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Id}_E\right) \end{array}$$

**Corollaire 2** (cas d'une matrice d'endomorphisme)**.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$ et $u$ un endomorphisme de $E$, si $M$ est la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$, $M'$ la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}'$ et $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors on a*

$$M = PM'P^{-1}.$$

**Exemple d'application :**

**Calcul des puissances d'une matrice**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on considère l'endomorphisme $\varphi$ de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associée :

(a) Cherchons les valeurs $\lambda$ tel que l'application $(\varphi - \lambda\mathrm{Id})$ soit non injective :
On cherche donc les $\lambda$ tel que le système suivant possède une infinité de solutions :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (\lambda+1)x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & (1-(1+\lambda)(1-\lambda))y & + & (1-(1+\lambda)z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & (1-\lambda)y & - & 3z & = & 0 \\ & & \lambda(\lambda-2)y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (-\lambda-2)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme le système obtenu est triangulaire, il y a un infinité de solutions si et seulement si la diagonale contient des zéros, c'est-à-dire si $\lambda \in \{0, -2, 2\}$.

(b) Pour $\lambda = 0$, on obtient le système soit

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

d'où $\mathrm{Ker}\ (\varphi) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De la même manière, on obtient
$$\mathrm{Ker}\,(\varphi - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(\varphi + 2\mathrm{Id}) = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On a 3 vecteurs non coplanaires donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et par construction
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculons la puissance de $M$.
Si on pose
$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3},$$
où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique. On a
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On a donc
$$\begin{aligned} M^n &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}\,(\varphi))^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}\,(\varphi^n) \\ &= P\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi^n)\,P^{-1} \\ &= P\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(\varphi))^n\,P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$
On calcule
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
En rassemblant, on obtient
$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} + (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

# 4 Rang d'une matrice

## 4.1 Définitions

Soient $M$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\varphi_M$ l'application linéaire canoniquement associée, c'es-à-dire
$$\begin{array}{rccc} \varphi_M : & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX. \end{array}$$

- Le noyau de $M$ noté $\mathrm{Ker}\,M$ comme le noyau de l'application $\varphi_M$.
- L'image de $M$ notée $\mathrm{Im}\,M$ comme l'image de l'application $\varphi_M$.
- Le rang de $M$ noté $\mathrm{rg}\,M$ comme le rang de la famille des vecteurs colonnes de $M$.

## 4.2 Propriétés

**Proposition 8.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie $p$ et $n$, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ des bases de $E$ et $F$ et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$, alors*

$$\operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f\right) = \operatorname{rg} f.$$

> **Remarque:** Ouf ! Il y a cohérence des définitions, si $\varphi_M$ est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $M$, on a $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} \varphi_M$.

Cette proposition permet de transférer les propriétés des applications en particulier, celles découlant du théorème de rang.

**Proposition 9.** *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors*

*(i)* $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$

*(ii) si* $\operatorname{rg} A = p$ *(c'est-à-dire si l'application canoniquement associée à $A$ est injective), alors*

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B.$$

*(iii) si* $\operatorname{rg} B = p$ *(c'est-à-dire si l'application canoniquement associée à $B$ est surjective), alors*

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} A.$$

**Corollaire 3.** *Multiplier une matrice par une matrice inversible conserve le rang. C'est-à-dire, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors*

$$\operatorname{rg}(ABC) = \operatorname{rg} B.$$

**Définition 1.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on dit que $A$ et $B$ sont équivalentes, si* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

**Proposition 10.** *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre*

*(i)* $\operatorname{rg} M = r$

*(ii) Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, tel que*

$$PMQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right),$$

*où $I_r$ est la matrice identité de dimension $r$.*

**Corollaire 4.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A$ et $B$ sont équivalentes, si et seulement si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, tel que*

$$A = PBQ.$$

**Corollaire 5.** *Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t\!A,$$

*en particulier le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille composée de ses vecteurs lignes.*

> **Remarque:** En particulier, pour calculer le rang d'une matrice, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes comme sur les colonnes.
> Par contre pour la recherche de $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Ker} M$, il faudra respecter les règles :
>
> 1. Si on cherche l'image de $M$, il faudra seulement effectuer des opération sur les colonnes.
> 2. Si on cherche le noyau de $M$, il faudra seulement effectuer des opération sur les lignes.

**Définition 2.** *Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$ avec $n_1\leq n$ et $p_1\leq p$.*

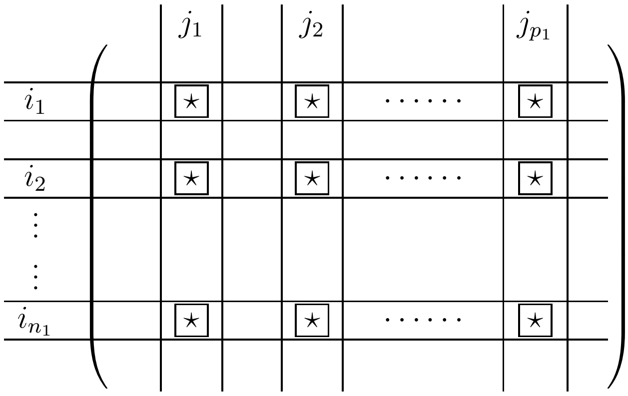
*On dit que $B$ est une matrice extraite de $A$,*

*si il existe $(i_1,\cdots,i_{n_1})\in\mathbb{N}^{n_1}$ et $(j_1,\cdots,j_{p_1})\in\mathbb{N}^{n_1}$*

*vérifiant $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n_1}\leq n$ et $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_{p_1}\leq p$, tel que*

$$\forall(k,\ell)\in[\![1,n_1]\!]\times[\![1,p_1]\!],\quad b_{k\ell}=a_{i_kj_\ell}.$$

**Remarque:** Une matrice extraite revient à ne conserver que certaines lignes et certaines colonnes.




on ne conserve que les éléments $\boxed{\star}$.

**Proposition 11.** *Soit $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre*

*(i)* $\operatorname{rg} M=r$.

*(ii) Les matrices carrées inversibles extraites de $M$ sont de dimension au plus $r$ et il existe une matrice carrée extraite inversible de taille $r$.*

# 5 Matrices semblables

**Définition 3.** *Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $A$ et $B$ sont semblables si il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que*

$$A=PBP^{-1}.$$

**Proposition 12.** *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$, $f$ un endomorphisme de $E$, $A$ la matrice $f$ dans une base $\mathcal{B}$ et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il y a équivalence entre*

*(i) $B$ est semblable à $A$.*

*(ii) Il existe $\mathcal{B}'$ une base de $E$ tel que $B=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}f$.*

**Exemple :**

Montrer que $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ sont semblables.

**Définition 4.** *La trace d'une matrice carrée notée* Tr *est la somme de ses éléments diagonaux, donc pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}.$$

**Proposition 13.** *La trace est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et on a pour tout* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

**Corollaire 6.** *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, si* $A$ *et* $B$ *sont semblables, alors* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$*.*

**Définition 5.** *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *une base de* $E$ *et* $f$ *un endomorphisme* $E$*, alors la valeur de* $\mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)$ *est indépendante du choix de* $\mathcal{B}$*. On notera* $\mathrm{Tr}(f)$ *cette quantité appelée trace de l'endomorphisme.*

**Exercice :**

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $M^2 = I_3$, montrer qu'il existe une unique matrice $A$ élément de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

tel que $M$ soit semblable à $A$.

**Proposition 14.** *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $p$ *un projecteur de* $E$*, alors*

$$\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}\, p.$$

**Exercice :** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\varphi(M) = M^T$ (la transposée de la matrice $M$). Calculer la trace de $\varphi$.