Matrices et applications linéaires

Exercice 1.

Ecrire les matrices des applications linéaires dans les bases précisées.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to & (x+y, x-y, 2x) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques, puis dans les bases $\big((1,1),(1,0)\big)$, $\big((0,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\big)$.
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \to & (x+y+2z-t, x-y-z+2t) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \to & \big(P(1), P'(1)+P''(0)\big) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \to & {}^tA \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.

Exercice 2.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace de* A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A & \to & \big(X \to \mathrm{Tr}(AX)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Exercice 3.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z,t) = (2x-y+z+5t, -x+2y+3z-4t, x+5z+6t)$.

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $\mathcal{B} = \big((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1)\big)$ et $\mathcal{D} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ des familles dont on admettra qu'elles sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Déterminer les matrices de passage des bases canoniques à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.
3. Calculer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 6.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit la famille $\mathcal{B}' = \big((1,1,1),(2,-1,-1),(-1,2,-1)\big)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$. On note a l'application linéaire canoniquement associée.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}^3$.
2. On pose $e_1 = (3,1,0),\ e_2 = (-1,1,1),\ e_3 = (0,1,1)$. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer sans calcul la matrice D de a dans (e_1,e_2,e_3).
4. Calculer D^n, puis A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\big)$. Après avoir montré que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice D de f dans cette base.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la matrice de f^n dans la base canonique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soit E une espace vectoriel de dimension finie et g un élément de $\mathrm{L}(E)$:

$$A = \{f\,;\ f \in \mathrm{L}(E), f \circ g = g \circ f = 0\}\,.$$

Montrer que A est espace vectoriel dont on déterminera la dimension en fonction de g.

Exercice 10.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E.
b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.
c) Montrer que

$$\{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$$

Exercice 11.

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\big\} \text{ et } D = \mathrm{Vect}(w) \text{ où } w = (1,0,-1)$$

1. Montrer que P et D sont supplémentaires et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à P et D.
2. On note $\mathcal{B}_c = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.
   (a) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}'$ puis dans $\mathcal{B}_c$.

   (b) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}_c$, de q et de s.

Exercice 12.

Calculer le rang des applications linéaires suivantes :
a) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

b) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

c) $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$$

Exercice 13. Calculer le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres :

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & a \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = O_3$.
Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Quelques aides

Exercice 10.

Indications 1 :

(i) Soit $y \in \operatorname{Im} f$, que dire de $f(y)$?

(ii) Soit $x \in E$, que dire de $f(x)$?

Indications 2 :

(i) Compléter une base de $\operatorname{Ker} g$ en une base $\mathcal{B}_1$ de E.

(ii) Compléter une base de $\operatorname{Im} g$ en une base $\mathcal{B}_2$ de E.

(iii) Exprimer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (attention au choix des bases de départ et d'arrivée).

(iv) Conclure.