Matrices et systèmes linéaires

Dans la suite, le corps $\mathbb{K}$ considéré sera soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Les énoncés précisés avec [$\star$] ne seront pas à connaître prioritairement, on privilégiera dans un premier temps l'assimilation du reste.

1 Matrices

1.1 Définition

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, on la représente pratiquement sous forme d'un tableau. $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ -3 & 4 & \pi \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -3 & 4 \\ \ln 3 & e^2 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, B est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On abrège par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.2 Terminologie

On appelle matrice colonne une matrice à une seule colonne.

On appelle matrice ligne une matrice à une seule ligne.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle

— j-ème vecteur colonne de M, la matrice colonne définie par $\begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$

— i-ème vecteur ligne de m, la matrice ligne définie par $\begin{pmatrix} m_{i1} & \cdots & m_{ip} \end{pmatrix}$

A une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on associe la matrice transposée, une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ noté ${}^tM$ ou M^T définie par de $[\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ dans $\mathbb{K}$ par $(i,j) \mapsto m_{ji}$.

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ -3 & 4 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \sqrt{2} & 4 \\ 3 & \pi \end{pmatrix}$$

On appelle matrices élémentaires, les matrices E_{ij} définie par

$$E_{ij} = (m_{kl}),$$

est une matrice remplie de 0 sauf en i-ème ligne et j-ème colonne, où c'est un 1. On a $m_{kl} = \delta_{i,k}\delta_{lj}$.

où le symbole de Kronecker est défini par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un matrice est dite carrée d'ordre n, si elle a n lignes et n colonnes.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n, elle est dite :

— triangulaire supérieure, si les termes non nuls sont au-dessus de la diagonale, c'est-à-dire si $i > j$, alors $m_{ij} = 0$. (ex : A_1)

— triangulaire inférieure, si les termes non nuls sont en-dessous de la diagonale, c'est-à-dire si $i < j$, alors $m_{ij} = 0$. (ex : A_2)

— diagonale, si les coefficients sont non nuls seulement sur la diagonale, c'est-à-dire si $i \neq j$, alors $m_{ij} = 0$. (ex : A_3)

— symétrique si ${}^tM = M$. (ex : A_4) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— antisymétrique si ${}^tM = -M$. (ex : A_5) On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -9 & 8 \\ 9 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & -13 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Opérations sur les matrices

1.3.1 Combinaisons linéaires de matrices

Les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des applications de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ forme donc un espace vectoriel muni des lois définies par

(i) $\forall (m_{ij}), (n_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad (m_{ij}) + (n_{ij}) = (m_{ij} + n_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \lambda \cdot (m_{ij}) = (\lambda m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

En particulier, on peut écrire toute matrice M comme combinaison linéaire des matrices élémentaires, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} E_{ij}.$$

Proposition 1. *L'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures, diagonales, symétriques, antisymétriques) est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 2. *Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1.3.2 Produit matriciel

On définit la produit matriciel de 2 matrices par

Pour $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

$$A\cdot B=C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}),$$

avec $\forall i\in[\![1,n]\!]\,,\forall j\in[\![1,q]\!]\,,\quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$

Remarques :

1. Le produit de 2 matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemples : Calculons le produit des matrices AB et BA dans les cas suivants, quand c'est possible :

1. $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-1\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}-2&2&1\\4&-2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix}$, on a alors

$$AB=\begin{pmatrix}-14&9&-4\\14&-9&5\end{pmatrix}.$$

Le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B sont différents donc le produit de B par A n'existe pas.

2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$, $\quad B={}^tA=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, alors on a

$$AB=(14),\quad BA=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}.$$

Définition 1. *Soit M une matrice carrée non nulle, M est nilpotente, si il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que M^p est la matrice nulle.*

$$A_6=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&-2\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad A_7=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

Remarque :

Les matrices triangulaires supérieures (inférieures) strictes sont nilpotentes.

1.3.3 Propriétés

Proposition 3. *Soit le produit matriciel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est une application bilinéaire. C'est-à-dire*

$$\forall(A,B),(C,D)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},$$

$$(A+\lambda B)\cdot C=A\cdot C+\lambda\,(B\cdot C)\qquad et\ A\cdot(C+\lambda D)=A\cdot C+\lambda\,(A\cdot D)\,.$$

Définition 2. *Soit $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle application linéaire canoniquement associé à M, l'application $\varphi_M\in\mathrm{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ définie par*

$$\varphi_M(X)=MX.$$

Proposition 4. *La multiplication matricielle est associative, c'est-à-dire*

$$\forall(A,B,C)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K}),\qquad A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C.$$

Proposition 5. *Soit le produit matriciel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il possède un élément neutre à gauche (respectivement droite) noté I ou I_n (respectivement I_p) appelé matrice d'identité.*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice carrée diagonale avec un des 1 sur la diagonale. C'est-à-dire

$$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad M \cdot \mathrm{I}_p \quad et \quad \mathrm{I}_n \cdot M = M.$$

Proposition 6. *L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni des lois usuelles est un anneau (non intègre et non commutatif si $n \geq 2$).*

Proposition 7. *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (inférieures) est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Lemme 1. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, alors on a*

$$^t(AB) = {}^tB\, {}^tA.$$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définition et terminologies

Le système (E)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n. \end{cases}$$

est un système linéaire de n équations à p inconnues $(x_1, \cdots, x_p)$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on a
   (a) $2x + y = 1$ est un système d'une équation à 2 inconnues.
   Géométriquement c'est une droite.
   (b) $\begin{cases} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 13 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues.
   Géométriquement c'est le point $(5, -3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on a
   (a) $2x + y + z = 1$ est un système d'une équation à 3 inconnues.
   Géométriquement c'est un plan.
   (b) $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 3 inconnues.
   Géométriquement c'est une droite.
   (c) $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ 3x - y + z &= 2 \end{cases}$ est un système de 3 équations à 3 inconnues.
   Géométriquement c'est le point $(2, 2, -2)$.

On associe au système (E) les vecteurs (ou matrices) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ce système est homogène, si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. On associe à un système quelconque le système homogène (ou système sans second membre) (E_h)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & 0. \end{cases}$$

On dit qu'un système linéaire est compatible, si il admet au moins une solution. Un système linéaire homogène est toujours compatible.

2.2 Structure des solutions d'un système linéaire

On conserve la notation (E) pour le système défini au paragraphe précédent.

2.2.1 Propriétés

Proposition 8. *Il y a équivalence entre*

(i) $(x_1, \cdots, x_p)$ *est solution de* (E)

(ii) $AX = B$

Proposition 9. *L'ensemble des solutions d'un système homogène est stable par combinaison linéaire.*

Explication : Si (E_h) est un système linéaire homogène et $(x_1, \cdots, x_p)$ et $(y_1, \cdots, y_p)$ sont deux solutions de (E_h) et λ un scalaire alors $(x_1 + \lambda y_1, \cdots, x_p + \lambda y_p)$ est aussi solution de (E_h).

Corollaire 1. *Si le système quelconque* (E) *admet une solution* $X_0 = (x_{1,0}, \cdots, x_{p,0})$ *et* (E_h) *sont système homogène associé, alors l'ensembles des solutions est de la forme*

$$S(E) = \{X_0 + X\,;\, X \in S(E_h)\}\,.$$

Proposition 10. *Si un système homogène possède strictement moins d'équations que d'inconnues, alors il admet une solution non nulle.*

2.3 Opérations élémentaires sur un systèmes (ou matrices)

2.3.1 Opérations élémentaires sur les lignes et systèmes équivalents

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire sont :

(i) La permutation des lignes i-ème et j-ème lignes notée notée $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) La multiplication de la i-ème ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$ notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

(iii) Pour $i \neq j$, l'ajout d'un multiple de la j-ème ligne à la i-ème ligne notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On dit que 2 systèmes $(E)_1$ et $(E)_2$ sont équivalents, si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

C'est une relation d'équivalence.

Proposition 11. *Si deux systèmes sont équivalents, ils ont même ensemble de solutions.*

Définition 3 (Matrices d'opérations élémentaires)**.** *On appelle matrice d'opérations élémentaire, les 3 types de matrices carrées suivants :*

1. *Matrice de transposition, , définie pour $i \neq j \in [\![1,n]\!]$ par*

$$P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}.$$

2. *Matrice de dilatation, définie pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ par*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

3. *Matrice de transvection, définie pour $i \neq j \in [\![1,n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ par*

$$T_{ij} = I_n + \alpha E_{ij}$$

Proposition 12 (Lien entre les opérations élémentaires et les multiplications par des matrices élémentaires)**.** *Appliquer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice M est équivalent à multiplier à gauche la matrice M par une matrice élémentaire, la correspondance est donnée par la tableau suivant*

$P_{ij}M$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$D_i(\lambda)M$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$
$T_{ij}(\alpha)M$	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Définition 4. *Deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par ligne, si il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui permet de passer transformer M_1 en M_2.*

Lemme 2. *Soit (E) un système de n équations à p inconnues, M sa matrice associée et B le vecteur de son second membre. Si il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant le système (E) en un système équivalent (E'), M' la matrice associée au système (E') et B' le vecteur de son second membre sont obtenus en appliqué la même suite d'opérations à M et à B.*

3 Calcul matriciel

3.1 Puissances d'une matrice carrée

Définition 5. *On définit la puissance d'une matrice carrée d'ordre n A pour $p \in \mathbb{N}$ par*

$$A^0 = I_n \qquad et \qquad A^{p+1} = A^p \cdot A.$$

Remarque: Du fait de la définition du produit matriciel, la puissance d'une matrice n'a de sens que pour une matrice carrée.

Proposition 13. *Soit*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale, alors

$$D^p = \begin{pmatrix} d_1^p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^p & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n^p \end{pmatrix}.$$

Exemple de calcul par récurrence :

Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2.
2. Sans poser de produit matriciel, déterminer M^3 et M^4
3. Exprimer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 14. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant (c'est-à-dire $AB = BA$) et $p \in \mathbb{N}$, alors on a*

1. $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$
2. $A^p - B^p = (A-B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$
3. $A^{2p+1} + B^{2p+1} = (A+B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k A^k B^{2p-k}\right)$

Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

3.2 Matrices inversibles

3.2.1 Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que A est i inversible si il existe B carrée d'ordre n tel que

$$AB = BA = I_n.$$

Si A est inversible, la matrice B vérifiant la propriété précédente est unique et on la note A^{-1}.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ inversibles.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication est un groupe (non commutatif dés que $n \geq 2$), car c'est l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

3.2.2 Propriétés

Proposition 15. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, alors on a*

1. *Si A inversible, alors A^{-1} inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*
2. *Si A inversible, alors ${}^tA$ inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.*
3. *Si A et B inversibles, alors AB inversibles et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Lemme 3. *Les matrice d'opérations élémentaires sont inversibles.*

Proposition 16. *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, tel que*

$$AB = I_n,$$

alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$.

Corollaire 2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre :*

(i) La matrice M est inversible.

(ii) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'équation

$$MX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} ,$$

admet au moins une solution X_i.

De plus, si la matrice M est inversible alors

$$M^{-1} = (X_1 | X_2 | \cdots | X_n)\,,$$

la matrice obtenue à accolant les solutions de (ii).

Corollaire 3. *Une matrice M triangulaire inférieure (respectivement supérieure) est inversible si et seulement si aucun élément de sa diagonale n'est nulle et alors l'inverse de M est triangulaire inférieure (respectivement supérieure).*

3.3 Inversion de matrices

Soit M une matrice carrée d'ordre , pour déterminer l'inversibilité de M et calculer son inverse, grâce au lemme 2. Il faut et suffit de résoudre pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'équation

$$MX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Il existe principalement deux manières de résoudre cette question.

3.3.1 Par les systèmes linéaires

Pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$, on résout le système

$$MX = Y.$$

Si le système admet une solution, il ne reste plus qu'à spécialiser pour obtenir M^{-1}, en cas d'impossibilité à résoudre, la. matrice n'est pas inversible.

3.3.2 Matriciellement

On accole M et I_n, on obtient la matrice

$$M_1 = (M|I_n)$$

On applique une suite d'opérations élémentaire sur les lignes avec pour objectif d' obtenir une matrice de la forme

$$M_1' = (I_n|M').$$

Si on aboutit, la matrice M' est l'inverse de M. Si à une étape la matrice remplaçant M est triangulaire non inversible alors M n'est pas inversible.