Limite et continuité

La notation $\star$ précise que la notion introduite est soit aux limites du programme soit un exemple qui n'est pas un résultat de cours à apprendre et ne doit pas être une priorité dans votre apprentissage.

Dans la suite, sauf précision contraire, I sera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ avec des bornes finies ou infinies et la fonction f sera définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Terminologie, définitions et première propriétés

1.1 Voisinages et propriétés locales

Soit a un nombre réel élément de l'intervalle I ou une des bornes de I (a est donc un élément de $\overline{\mathbb{R}}$), on dit que f vérifie une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a, si on a

(i) Dans le cas où le nombre a est finie, il existe un réel $\eta > 0$, tel que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout x élément de $I \cap]a-\eta, a+\eta[$.

(ii) Dans le cas où le nombre $a = +\infty$, il existe un réel M, tel que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout x élément de $I \cap]M, +\infty[$.

(iii) Dans le cas où le nombre $a = -\infty$, il existe un réel m, tel que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout x élément de $I \cap]-\infty, m[$.

1.2 Borne sup, extremums

La fonction f est majorée (respectivement minorée, bornée) sur I, si $f(I)$ est une partie majorée (respectivement minorée, bornée) de $\mathbb{R}$.

Avec des quantificateurs, on peut reformuler par

$$\begin{aligned}
\text{La fonction } f \text{ est majorée sur } I. &\iff \exists M, \forall x \in I, \quad f(x) \leq M. \\
\text{La fonction } f \text{ est minorée sur } I. &\iff \exists m, \forall x \in I, \quad m \leq f(x). \\
\text{La fonction } f \text{ est bornée sur } I. &\iff \exists M, \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M.
\end{aligned}$$

On définit le sup, inf, maximum et minimum de f sur I, si il existe par

(i) Le sup (respectivement l'inf) de f sur I est la borne sup (respect. inf) de $f(I)$.

(ii) Le maximum (respect. minimum) de f sur I est le maximum (respect. minimum) de $f(I)$. Cela signifie que la borne sup (respectivement inf) est atteinte en un point x_0 de I.

1.3 Limite d'une fonction en un point et continuité

1.3.1 Limite ponctuelle

Soient a un nombre réel élément de l'intervalle I ou une des bornes de I et b un élément de $\mathbb{R}$, on dit que f admet la limite b en a, si pour tout $\epsilon > 0$, la propriété $|f(x) - b| \leq \epsilon$ est vraie au voisinage de a. Avec des quantificateurs, on l'écrit :

(i) Si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x-a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-b| \leq \epsilon.$$

(ii) Si $a = +\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \geq A \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-b| \leq \epsilon.$$

(iii) Si $a = -\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \leq A \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-b| \leq \epsilon.$$

Soient a un nombre réel élément de l'intervalle I ou une des bornes de I et on dit que f admet la limite $+\infty$ en a, si pour tout réel M, la propriété $f(x) \geq M$ est vraie au voisinage de a. Avec des quantificateurs, on l'écrit :

(i) Si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x-a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq M.$$

(ii) Si $a = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \geq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq M.$$

(iii) Si $a = -\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \leq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq M.$$

Soient a un nombre réel élément de l'intervalle I ou une des bornes de I, on dit que f admet la limite $-\infty$ en a, si pour tout réel M, la propriété $f(x) \geq M$ est vraie au voisinage de a. Avec des quantificateurs, on l'écrit :

(i) Si $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x-a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq M.$$

(ii) Si $a = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \geq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq M.$$

(iii) Si $a = -\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \qquad x \leq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq M.$$

Pour J un intervalle et a un nombre réel élément de l'intervalle J ou une des bornes de J, on étend la définition de limite en a au cas d'une fonction f définie définie sur $I = J \setminus \{a\}$ en utilisant les mêmes quantifications que dans les 9 cas précédents.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ pour f admet pour limite b en a.

1.3.2 Continuité

Soient a un élément de I, si f admet une limite en a, on a nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et on dit alors que f est continue en a. Cela se résume en

« La fonction f est continue en a, si elle est définie en a et elle admet une limite en a. »

On l'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

On dit que la fonction f est continue sur I, si elle continue en tout point de I.

Proposition 1. *Soit a un élément de I ou une borne finie de I et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ admettant une limite finie b en a, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a. \end{array} \right. \end{array}$$

est l'unique prolongement de f à I continue en a. On dit qu'on a prolongé f par continuité en a.

Exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, son prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ est

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

1.3.3 Limite et continuité à droite (ou à gauche)

Soient a un élément de I ou une borne de I et b un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que la fonction f admet la limite b à droite en a, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| \leq \eta \quad \text{et} \quad x > a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On le note $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = b$.

Soient a un élément de I ou une borne de I et b un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, on dit que la fonction f admet la limite b à gauche en a, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| \leq \eta \quad \text{et} \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| \leq \epsilon.$$

On le note $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = b$.

On dit que la fonction f est continue à droite (respectivement à gauche) en $a \in I$, si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).

Proposition 2. *Soit a un élément de I, il y a équivalence entre*

(i) La fonction f est continue en a.

(ii) La fonction f est continue à droite et à gauche en a.

2 Résultats sur les limites de fonctions

2.1 Opérations algébriques

Lemme 1. *Si la fonction f admet une limite finie b en a alors :*

1. *Pour tout $\alpha < b$, la fonction f est supérieure à α au voisinage de a.*
2. *Pour tout $\beta > b$, la fonction f est inférieure à β au voisinage de a.*

Corollaire 1. *Si la fonction f admet une limite finie b en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Lemme 2. *Soient f et g 2 fonctions définies sur I et a un élément ou une borne de I.*

Si la fonction f admet une limite nulle en a et la fonction g est bornée au voisinage de a, alors la fonction fg admet une limite nulle en a.

Proposition 3 (Opérations algébriques sur les limites)**.** *Soient a un élément ou une borne de I, f et g 2 fonctions définies sur I admettant des limites ℓ_1 et ℓ_2 en a et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors*

(i) La fonction λf admet une limite en a donnée par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell_1$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\ell_1$	$-\infty$	$+\infty$

(ii) La fonction $f + g$ admet une limite en a donnée par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

(iii) La fonction fg admet une limite en a donnée par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}^{-*}$	$\ell_1 = 0$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}^{-*}$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

(iv) La fonction $\frac{1}{f}$ admet une limite en a donnée par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}^*$	$\ell_1 = 0$	$\ell_1 = \pm\infty$
	$\frac{1}{\ell_1}$	∞[1]	0

F.I. Forme indéterminée

Remarque: On étend sans difficulté la proposition précédente au cas des fonctions f et g définies sur $I \setminus \{a\}$ et admettant des limites en a.

2.2 Inégalités entre limites et existence de limite

Proposition 4. *Soit a un élément ou une borne de I, on suppose que la fonction f est positive au voisinage de a et qu'elle admet une limite b en a, alors $b \geq 0$.*

Corollaire 2. *Soient deux fonctions f et g définies sur I, a un élément ou une borne de I, on suppose qu'on a $f \leq g$ au voisinage de a et que f et g admettent des limite b_1 et b_2 en a, alors $b_1 \leq b_2$.*

Remarque: Attention la proposition et le corollaire précédents ne donnent qu'une inégalité, mais pas l'existence des limites, il faut l'avoir démontrée par ailleurs.

Proposition 5 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient trois fonctions f, g et h définies sur I, a un élément ou une borne de I, on suppose qu'on a $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et que f et h admettent une limite finie commune b en a, alors la fonction g admet la limite b en a.*

Proposition 6 (Théorème des gendarmes à l'infini)**.** *Soient deux fonctions f et g définies sur I, a un élément ou une borne de I, on suppose qu'on a $f \geq g$ au voisinage de a, alors on a*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty.$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty.$

Remarque: Les deux versions du théorème des gendarmes donnent l'existence de la limite.

Proposition 7 (Théorème de la limite d'une fonction monotone)**.** *Soient f définie sur I, a un élément ou une borne de I, on suppose la fonction f croissante et majorée au voisinage de a, alors f admet une limite à gauche de a.*

Remarque: Cette proposition se généralise sans difficulté à

1. La fonction f décroissante et minorée au voisinage de a, alors f admet une limite à gauche de a.
2. La fonction f décroissante et majorée au voisinage de a, alors f admet une limite à droite de a.
3. La fonction f croissante et minorée au voisinage de a, alors f admet une limite à droite de a.

2.3 Caractérisation séquentielle de la limite et continuité

Proposition 8. *Soient f une fonction définie sur I, a un élément ou une borne de I et b un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, il y équivalence entre*

(i) La fonction f admet la limite b en a.

(ii) Pour tout suite (u_n) d'éléments de I de limite a, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ a pour limite b.

Corollaire 3. *Soient f une fonction définie sur I, a un élément de I, alors il y a équivalence entre*

(i) La fonction f est continue en a.

(ii) Pour tout suite (u_n) d'éléments de I de limite a, la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ a pour limite $f(a)$.

Corollaire 4. *Soient f une fonction définie sur I à valeur dans J et g une fonction définie sur J, on suppose que*

1. *La fonction f admet la limite b en a.*
2. *La fonction g admet la limite c en b.*

alors la fonction $g \circ f$ admet la limite c en a.

3 Continuité sur un intervalle

On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$), l'ensemble des fonctions continues sur I.

3.1 Opérations sur les fonctions continues sur intervalle

Proposition 9. *Soient f et g 2 fonctions continues sur I et λ un nombre réel, alors les fonction $f + \lambda g$ et $f \cdot g$ sont continues sur I.*

Proposition 10 (Composition de fonctions continues)**.** *Soient f une fonction continue sur I et g une fonction continue J avec $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue.*

3.2 Image d'un intervalle

Proposition 11 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient f une fonction continue sur I et a, b 2 éléments de I et y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.*

Proposition 12. *Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors la fonction f admet un maximum et minimum sur $[a, b]$.*

Remarque: On peut reformuler ce théorème en
« **Si f est continue sur $[a, b]$, il existe x_0 et x_1 éléments de $[a, b]$ tel que**

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

»

Exemples:

1. Si la fonction f est continue strictement positive sur $[0, 1]$, alors il existe $\alpha > 0$, tel que $f \geq \alpha$ sur [0,1].
2. Si on enlève l'hypothèse du segment $[a, b]$, cela devient faux, un intervalle borné ne suffit pas. La fonction ln est continue sur $]0, 1]$, mais elle n'y admet pas de minimum.

Corollaire 5. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Corollaire 6 (Théorème de la bijection)**.** *Si la fonction f est continue strictement croissante sur I et $a < b$ sont des éléments de I, tout nombre $y \in [f(a), f(b)]$ admet un unique antécédent par f dans $[a, b]$. Ce qui se reformule si la fonction f est continue strictement croissante sur I, alors f est bijective de I dans $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle.*

Remarques:

1. Le résultat reste vrai en remplaçant l'hypothèse croissante par décroissante, il faut juste changer $[f(a), f(b)]$ par $[f(b), f(a)]$.
2. Cette proposition porte aussi le nom de corollaire des valeurs intermédiaires.

3.3 Fonctions continues bijectives

Proposition 13. *Soit f une fonction continue sur I, alors il y a équivalence entre*

1. *La fonction f est injective de I dans $J = f(I)$.*
2. *La fonction f est strictement monotone sur I.*

Remarque: On précise J en calculant les limites au borne de I.

Proposition 14. *Soit f une fonction monotone sur I, il y a équivalence entre*

1. *La fonction f est continue.*
2. *$f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 7. *Soit f une fonction continue bijective de l'intervalle I sur $f(I)$, alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue bijective de $f(I)$ dans I.*

Remarque: L'hypothèse I est un intervalle ne doit pas être oubliée.

4 Retour sur les suites

4.1 Suites récurrentes

Pour ce paragraphe, on suppose que la fonction f est définie I dans I et la suite (u_n) est définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite est ainsi bien définie. Si l'intervalle n'est pas précisé dans l'énoncé (en particulier dans une planche d'oral), il faudra étudier l'expression de la fonction de la fonction f ainsi que u_0 pour faire un choix judicieux.

Avant de chercher les limites potentielles de (u_n), l'important est de savoir si elle converge ou non. La proposition suivante sera utile pour cela.

Proposition 15. *On suppose que la fonction f est croissante de I dans I, alors la suite (u_n) est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$.*

Remarques:

1. Le choix de l'intervalle I est ici important. On cherche en général à avoir un intervalle de stabilité le plus petit possible pour avoir la monotonie sur cet intervalle.
2. Si on a la décroissance de f, on a alors la croissance de la fonction $f \circ f$ et on étudie les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = u_0 \\ v_{n+1} = f \circ f(v_n) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} w_0 = f(u_0) \\ w_{n+1} = f \circ f(w_n). \end{array}\right.$$

Proposition 16. *On suppose que la fonction f est continue et que la suite (u_n) converge ℓ, alors ℓ est un point fixe de f (C'est-à-dire $f(\ell) = \ell$).*

Remarque: Attention ! L'existence d'un point fixe ne suffit pas à prouver la convergence.
Contre-exemple :
La suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{array}\right.$ ne converge pas, pourtant la fonction $x \mapsto 2x + 1$ admet le point fixe -1.