Suites (2ème partie)

Exercice 1. Soit pour $n \in \mathbb{N}$
$$(E_n) \quad x^n + 2x^2 - 1 = 0.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ que l'on notera x_n.
2. Etudier la convergence de (x_n).
3. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de x_n que l'on notera u_n.
4. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $(\alpha_n) = (\ln(u_n - x_n))$.
5. Déterminer un équivalent de la suite $(u_n - x_n)$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x) - x$.

1. Démontrer que pour tout entier n, f admet un unique zéro x_n sur $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
2. Déterminer un équivalent a_n simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que x_n admet un développement asymptotique de la forme
$$x_n = \alpha_1 n + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),$$
on déterminera $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}$.
(Indication : Penser à étudier $x_n - a_n$ et $\tan(x_n - a_n)$ pour déterminer α_0)

Exercice 3.

Étudier les suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \dfrac{1}{6}(v_n^2 + 8) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+1} = \dfrac{2}{1 + w_n^2} \end{cases}$$

Exercice 4. Radicaux itérés

Etudier la convergence de $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}$ (n radicaux).

Exercice 5. Suites homographiques

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{C}^*$, $\quad u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n}$.

On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
2. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines distinctes α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.
Étudier la suite $(v_n) = \left(\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ et en déduire $\lim u_n$.

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et la suite définie par
$$u_0 \in \mathbb{R}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Étudier la suite (u_n).

Exercice 7. $\star\star$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$. Étudier la convergence de u_n.