Exercices introductifs
Partie 2

Exercice 1.

Pour $n, m \in \mathbb{N}$ rel que $n \leq m$, en utilisant une somme télescopique, écrire sous forme réduite

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n}.$$

Exercice 2.

Exprimer de manière réduite les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0\leq i,j\leq n} |i-j|\,, \quad S_2 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{i}{j}, \qquad S_3 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{i+j}$$

$$S_4 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{i}{j} 2^{i+j}, \quad S_5 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} \quad S_6 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} \frac{k^3}{(s+k)^2}.$$

Pour S_6, on pourra sommer selon les diagonales.

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|x+2| \leq 3$ (b) $|x+2| > 3$

(c) $|2x+3| \geq |x+4|$ (d) $x^2+1 \leq 2x^2+3x+2$.

Exercice 4.

Résoudre les systèmes suivants :

$$(a)\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 9 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 17 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x - y + z - t = -2 \\ 2x - 3y + z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x - y + 3z + 2t = -5 \end{cases}$$

Exercice 5.

1. En fonction de α, discuter des solutions du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - \alpha y - z = 1 \\ x - y - z = 6 \end{cases}$$

2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$, le système suivant possède-t-il une unique solution ?

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & \lambda y & = & 3 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \\ \lambda x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 6.

Déterminer le nombre de solution(s) du système en fonction de a et b. Si le nombre de solutions est infini, on précisera le nombre de degré de liberté de l'espace des solutions.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & - & by & & & + & t & = & a \\ bx & + & ay & + & z & & & = & b \\ & & y & + & az & - & bt & = & a \\ x & & & + & bz & + & at & = & b. \end{array}\right.$$

Exercice 7.

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Résoudre $x = f(x)$.
2. Résoudre $x = f \circ f(x)$.
3. Résoudre $x = f \circ f \circ f(x)$.
4. Généraliser.

Exercice 8.

Déterminer tous les entiers naturels x, y et z tel que

$$x + y + z = xyz.$$