Exercices introductifs

Exercice 1.

1. Soit x un réel, minorer de manière optimale $x(x-1)$.
2. Soient a, b, c 3 réels compris entre 0 et 1, montrer qu'au moins un des trois nombres suivants est plus petit que $\frac{1}{4}$:

$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a).$$

Exercice 2.

Résoudre

$$x = \sqrt{1+x}.$$

Exercice 3.

Déterminer toutes les fonctions f tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 4.

On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, i.e. toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y, \in R$:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

1. Analyse : Soit f une isométrie. On note δ la fonction définie par $\delta(x) = f(x) - f(0)$.
   (a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$ que pour tous $x, y \in R$

   $$\delta(x)\delta(y) = xy.$$

   (b) En déduire la forme de f .
2. Synthèse : Conclure.

Exercice 5.

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 6. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 7. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 8.

Déterminer des expressions réduites de

(a) $A_n = \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N} \\ i+j=n}} ij$

(b) $P_n = \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 0\leq 2k\leq n}} \binom{n}{2k}$ et $I_n = \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 0\leq 2k+1\leq n}} \binom{n}{2k+1}$.

Exercice 9.

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on pose $S_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ et $M_p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1}$.

1. Donner une forme condensée de $S_0(n)$.
2. En développant $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$, déterminer une expression de $M_p(n)$ en fonction de $S_0(n), \cdots, S_p(n)$.
3. Donner une expression condensée de $M_p(n)$.
4. Déterminer une relation de récurrence reliant $S_p(n)$ à $S_0(n), \cdots, S_{p-1}(n)$.
5. Trouver les valeurs **A SAVOIR** des sommes

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$