Introduction à l'algèbre linéaire

Exercice 1.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \ ; \ x = y\}$ 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x - 5y - 1 = 0\}$ 3) $\{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$

4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$ 5) $\{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ \deg(P) \geq 2\}$ 6) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f(0) + f(1) = f'(0)\}$

7) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ ; \ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ 8) $\{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ \deg(P) \leq 2\}$ 9) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$

10) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f \text{ fonction périodique}\}$

Exercice 2.

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ f(0) = f'(2) = 0\}$ et $G = \{x \to ax + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Montrer l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ forment 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles, soit

$$A = \{(u_n) \quad ; \quad (u_n) \text{ suite réelle bornée.}\}$$

$$B = \{(u_n) \quad ; \quad (u_n) \text{ suite réelle qui converge vers 0.}\}$$

$$C = \{(u_n) \quad ; \quad (u_n) \text{ suite réelle qui converge vers une limite finie.}\}$$

Montrer que A, B et C sont des sous-espaces vectoriels de E. On précisera les inclusions qui les lient. Déterminer un supplémentaire de B dans C.

Exercice 5.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-ev de E.

1. Montrer : $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Montrer : $(G \subset F \text{ ou } H \subset F) \Longrightarrow (F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + H)$.
3. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité dans l'inclusion du 1.

Exercice 6.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G 2 sous-espaces vectoriels de E, montrer qu'il y a équivalence entre

(i) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x+z, 2y-3z, x+3y-4z)$. Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

Exercice 8.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout V sous-ev de E et W sous-ev de F, montrer que :

1) $f^{-1}\big(f(V)\big) = V + \mathrm{Ker}\,(f)$.

2) $f\big(f^{-1}(W)\big) = W \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 9.

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ qui à une fonction f associe sa dérivée f' et enfin $\psi : E \to E$ définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \big(\psi(f)\big)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que φ et ψ sont linéaires.
2. Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.
3. Etudier l'injectivité, la sujectivité et la bijectivité de ψ et φ.

Exercice 10.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ et :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ & (x,y) & \longrightarrow & (x+g(y),y) \end{array}$$

Montrer que φ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 12.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$ et $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q)$. Montrer que $p = q$.

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 14.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x,y,z) = (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z)$. Montrer que u est linéaire et que $\frac{1}{3}u$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les espaces H et H' tels que $\frac{1}{3}u$ soit la symétrie par rapport à H et parallèlement à H'. En déduire que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, montrer que

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 16. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que
   (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$.
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.
2. Montrer que si $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1}$, alors $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+p}$.
3. Traiter le cas de $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^n$.

Exercice 17. $\star$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f, g 2 endomorphismes de E, on suppose

$$f \circ g = g \quad \textit{et} \quad g \circ f = f.$$

Caractériser f et g .