Intégration

Exercice 1.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et non nulle telle que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 \quad \text{où } f^2 = f \times f.$$

Montrer que $f = 1$.

Exercice 2.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f| \Longleftrightarrow (f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0).$$

Exercice 3.

Soient $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$, avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Pensez au TVI et au théorème des bornes...

Exercice 4.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que l'équation :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 2x - 1$$

d'inconnue $x \in [0,1]$, admet une unique solution.

Exercice 5.

Déterminer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^3} \frac{1}{(\ln t)^2} \mathrm{d}t.$

Exercice 6.

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_1^x e^t \ln t \ \mathrm{d}t}{e^x \ln x} = 1$$

Exercice 7.

Calculer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2k}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 8.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, calculer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right)$
2. $\displaystyle v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{0\le i\le j\le n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$
3. $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$

Exercice 9. $\star$ Soient g une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{C}$, un nombre complexe a tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$ et f une solution sur $\mathbb{R}^+$ de

$$y' + ay = g.$$

Montrer que

1. Si g est bornée alors f est bornée.
2. Si g admet une limite nulle en $+\infty$, alors f admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 10. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et les 2 parties de E définies par

$$A = \{f\,;\, f\in E, \quad \text{tel que } f,\ f' \text{ et } f'' \text{ sont trois fonctions bornées}\}$$
$$B = \{f\,;\, f\in E, \quad \text{tel que } f \text{ et } f'' \text{ sont deux fonctions bornées}\}$$

1. Montrer A et B sont des sous-espaces vectoriels de E. Donner une inclusion entre les deux.
2. Soit f une fonction de B, on va montrer que f est aussi une fonction de A. Soient M_0 un majorant de $|f|$ et M_2 un majorant de $|f''|$.
   (a) Soient x un réel fixé et un réel $h > 0$.
   En appliquant une formule de Taylor à $f(x+h)$ puis à $f(x-h)$ montrer que
   $$|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \le \sqrt{2M_0M_2}$.
   (c) Conclure.

Exercice 11.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, on définit la suite (I_n) par $I_n = \int_a^b \cos(nt)f(t)\mathrm{d}t$.

1. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $I_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$, déterminer une développement asymptotique à 2 termes I_n.

Exercice 12. Soit un fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ tel que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

1. Montrer que
$$\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{e}.$$
2. L'inégalité peut-elle être une égalité ?
3. $\star\star$ L'inégalité est-elle optimale ?

Exercice 13.

Développer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$:

1. $\frac{1}{X^2(X^2+1)^2}$ (on pourra penser à un changement de variable)
2. $\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (X+k)}$
3. $\frac{X^5+2}{(X^2+1)^3}$
4. $\frac{X}{X^4+X^2+1}$
5. $\frac{X^2+X+1}{(X^2-1)(X^2+1)}$
6. $\frac{1}{X^2-2\cos(\theta)X+1}$, où θ est un réel fixé.
7. $\frac{1}{T_n}$, où T_n est le n-ème polynôme de Tchebychev.