

Groupes, Anneaux, Corps

Exercice 1.

Soient $(E, *)$ un ensemble muni d'un loi de composition interne associative, $a \in E$, \perp la loi de composition interne dans E définie par : $x \perp y = x * a * y$. Montrer que \perp est associative.

Exercice 2.

Soit $(E, *)$ un ensemble E muni d'une lois de composition interne $*$. Un élément x de E est dit *idempotent* si : $x * x = x$.

1. Montrer que si $*$ est associative et si x et y sont idempotents et commutent, alors $x * y$ est idempotent.
2. Montrer que si $*$ est associative, admet un neutre et si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 3.

On pose, pour tous $(x, y) \in]-1, 1[^2$: $x \vee y = \frac{x + y}{1 + xy}$

1. Montrer que $(]-1, 1[, \vee)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(]-1, 1[, \vee)$.

Exercice 4.

Soit (G, \cdot) un groupe de neutre e tel que : $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que (G, \cdot) est commutatif.

Exercice 5.

Soient (G, \cdot) un groupe, e son neutre et $(a, b) \in G$ tels que :

$$a^{-1}ba = b^2, \text{ et } b^{-1}ab = a^2.$$

Montrer que $a = e$ et $b = e$.

Exercice 6.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $x \rightarrow ax + b$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{f_{a,b} ; (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ est un groupe pour la composition \circ . Est-il commutatif?

Exercice 7.

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G . Montrer :

$$H \cup K = G \iff (H = G \text{ ou } K = G).$$

Exercice 8.

Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par : $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$.

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de G .

Exercice 9.

Soient $(G, *)$, (G', \bullet) deux groupes. On définit la loi produit \perp sur $G \times G'$ par :

$$\forall ((x, x'), (y, y')) \in (G \times G')^2, (x, x') \perp (y, y') = (x * y, x' \bullet y').$$

1. Montrer que $(G \times G', \perp)$ est un groupe.

2. Montrer que si H est sous-groupe de G et H' un sous-groupe de G' alors $H \times H'$ est un sous-groupe de $G \times G'$.

Exercice 10.

Déterminer tous les morphismes de groupes de

1. $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}, +)$
2. $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$
3. $(\mathbb{Q}, +)$ dans (\mathbb{Q}^*, \times)

Exercice 11.

On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau.

Exercice 12.

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau et déterminer les inversibles pour la loi de multiplication. (Indication : regarder le module d'un produit de deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$)

Exercice 13.

Définition : Un diviseur de 0 d'un anneau A est un élément x de A tel qu'il existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ vérifiant $xy = 0_A$.

Soient A un anneau et $(a, b) \in A^2$. On suppose que ab est inversible et que ba n'est pas diviseur de 0. Montrer que a et b sont inversibles.

Indication : Poser φ_y l'application de A dans A définie par $\varphi_y(x) = yx$. Étudier l'injectivité et surjectivité de φ_a et φ_b .

Exercice 14.

Soit A un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que, si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
2. Montrer que, si x est nilpotent et x et y commutent, alors xy est nilpotent.
3. Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1 - x)^{-1}$.