Fractions rationnelles en une indéterminée sur $\mathbb{K}$

Dans la suite, on considérera que $\mathbb{K}$ est un corps (dans la pratique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Généralités

1.1 Définition

On construit le corps des fractions rationnels $\mathbb{K}(X)$ comme l'ensemble des éléments de la forme $F = \frac{P}{Q}$, où P, Q sont deux polynômes de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$. On étend de manière naturelle les opérations d'addition et de multiplication interne de $\mathbb{K}[X]$ par

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_2}{Q_1Q_2}$$

et

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

On a de plus la relation d'égalité

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Longleftrightarrow P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0.$$

On dit qu'une fraction $\frac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$ et que le polynôme Q est unitaire. (On peut toujours mettre une fraction sous forme irréductible en divisant par le PGCD).

Cela muni $\mathbb{K}(X)$ d'une structure de corps.

On définit le degré d'une fraction $R = \frac{P}{Q}$ par $\deg R = \deg P - \deg Q$. (C'est indépendant de la représentation choisie.)

2 Développements en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Proposition 1. *Soit $F = \frac{P}{Q}$ un élément de $\mathbb{C}(X)$, il existe une unique décomposition de F sous la forme*

$$F = P_1 + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-\beta_i)^j}}_{\text{Partie polaire associée au pôle } \beta_i},$$

avec P_1 un polynôme, $\alpha_{i,j}$, β_i des nombres complexes, tel que β_i est racine de Q et n_i l'ordre de cette racine. Les nombres β_i sont appelés pôles de la fraction. On dit β_i est pôle d'ordre n_i, le pole est simple si $n_i = 1$.

Remarque : *Si le degré de P est inférieur strictement au degré de Q, on a nécessairement P_1 nul (comportement asymptotique à l'infini). Sinon on fait la division euclidienne de P par Q et alors $P = AQ + R$ avec degré de R strictement inférieur à celui de Q, d'où*

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}.$$

La démonstration qui est hors programme, l'existence est démontrée en annexe.

Explication sur un exemple de la détermination de la décomposition

Soit $F = \frac{X^6+1}{X^3-X}$.

Première étape :

On effectue la division euclidienne de X^6 par $X^3 - X$ pour se ramener à numérateur de degré inférieur à celui du dénominateur, soit

$$X^6 + 1 = (X^3 - X)(X^3 + X) + X^2 + 1,$$

on a donc

$$F = \frac{(X^3 - X)(X^3 + X) + X^2 + 1}{X^3 - X} = (X^3 + X) + \frac{X^2 + 1}{X^3 - X}.$$

Seconde étape :

On factorise le dénominateur, $X^3 - X = X(X + 1)(X - 1)$.

La proposition donne l'existence et l'unicité de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$\frac{X^2 + 1}{X(X + 1)(X - 1)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X + 1}.$$

On peut toujours tout regrouper au même dénominateur à droite et identifier les numérateurs de gauche et de droite. Cela est en général un peu long. Autre méthode :

Soit en multipliant par X,

$$\frac{X^2 + 1}{(X + 1)(X - 1)} = \frac{aX}{X - 1} + b + \frac{cX}{X + 1}.$$

On obtient en spécialisant en 0, $b = -1$.

De manière similaire en multipliant par $X - 1$,

$$\frac{X^2 + 1}{X(X + 1)} = a + \frac{b(X - 1)}{X} + \frac{c(X - 1)}{X + 1}.$$

On obtient en spécialisant en 1, $a = 1$.

Puis en multipliant par $X + 1$,

$$\frac{X^2 + 1}{X(X - 1)} = a\frac{X + 1}{X - 1} + \frac{b(X + 1)}{X} + c.$$

On obtient en spécialisant en -1, $c = 1$.

On conclut :

$$\boxed{F = X^3 + X + \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X + 1}}$$

Proposition 2. *Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec un pôle simple en α, la partie polaire associée au pôle α est alors*

$$\frac{\lambda_\alpha}{X - \alpha},$$

où $\lambda_\alpha = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Exemple :

Développement en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$.

Proposition 3. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$*, on suppose que*

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{n_k}$$

avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ *des nombres complexes 2 à 2 distincts, alors on a*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p} \frac{n_k}{X - \alpha_k}.$$

3 Développements en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Proposition 4. *Soit* $F = \frac{P}{Q}$ *un élément de* $\mathbb{R}(X)$*, il existe une unique décomposition de* F *sous la forme*

$$F = P_1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(X - b_i)^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{c_{i,j}X + \mathrm{d}_{i,j}}{(X^2 + f_iX + g_i)^j}$$

avec P_1 *un polynôme,* $a_{i,j}$*,* b_i*,* c_i*,* d_i*,* f_i *et* g_i *des nombres réels, tel que* b_i *est racine de* Q *et* n_i *l'ordre de cette racine et les trinômes* $X^2 + f_iX + g_i$ *les facteurs irréductibles de degré 2 (c'est -à-dire* $f_i^2 - 4g_i < 0$*)* Q *d'ordre* l_i*.*

La démonstration qui est hors programme, l'existence est démontrée en annexe.

Explication sur un exemple de la détermination de la décomposition

Soit $F = \dfrac{X+1}{X^5 + 2X^3 + X}$.

Première étape :

Le numérateur est déjà de degré plus petit que celui du dénominateur. Rien à faire.

Deuxième étape :

On factorise dans $\mathbb{R}$ le dénominateur, soit $X^5 + 2X^3 + X = X(X^2+1)^2$.

La proposition nous donne directement l'existence et l'unicité de $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, tel que

$$F = \frac{X+1}{X(X^2+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

Soit en multipliant par X,

$$\frac{X+1}{(X^2+1)^2} = a + \frac{X(cX+d)}{X^2+1} + \frac{X(eX+f)}{(X^2+1)^2}.$$

On obtient en spécialisant en 0, $a = 1$.

Soit en multipliant par $(X^2+1)^2$,

$$\frac{X+1}{X} = \frac{a(X^2+1)^2}{X} + (X^2+1)(cX+d) + eX + f.$$

En spécialisant en $X = i$, on obtient

$$1 - i = \frac{1+i}{i} = ei + f,$$

soit comme f, g réels, $f = 1$ et $e = -1$.

On a donc

$$\frac{X+1}{X(X^2+1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{-X+1}{(X^2+1)^2}.$$

Les cas avec des pôles d'ordre supérieur à 2 est toujours un peu fastidieux.

On rassemble alors au même dénominateur :

$$\frac{X+1}{X(X^2+1)^2} = \frac{(c+1)X^4 + dX^3 + (1+c)X^2 + (d+1)X + 1}{X(X^2+1)^2}.$$

Part identification, on obtient $c = -1$ et $d = 0$.

On conclut :

$$\boxed{\frac{X+1}{X^5+2X^3+X} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} + \frac{-X+1}{(X^2+1)^2}.}$$

Remarque :

La proposition nous donne l'existence et l'unicité des coefficients, on peut utiliser de nombreuses manières pour les déterminer. Le but est d'arriver à les déterminer en un temps raisonnable, toutes les observations sur la forme des expressions permettant de gagner du temps sont les bienvenues (parité, comportement à l'infini, limite en un point, évaluation en des points judicieusement choisis etc...).

4 Applications

4.1 Calculs de sommes

Exemple :

Déterminer la limite de u_n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

On développe en éléments simples. La proposition principale nous donne l'existence et l'unicité de réels a, b, c, tel que

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

En multipliant par X, on a

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{X+2}.$$

et en spécialisant en $X=0$, on obtient $a=\frac{1}{2}$.

En multipliant par $X+1$ et en spécialisant $X=-1$, on obtient $b=-1$. En multipliant par $X+2$ et en spécialisant $X=-2$, on obtient $c=\frac{1}{2}$.

On a donc

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}=\frac{1}{2X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{2(X+2)}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Par télescopage des termes, on a donc

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{4}.}$$

Exercice : Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$.
2. $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+4k^2+3k}$.
3. $\star\ w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}$.

(Pour la dernière, on pourra admettre le fait que $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, où γ est une constante qu'on ne cherchera pas à expliciter.)

4.2 Calculs de primitives

Exemple 1 :

Calcul d'une primitive de $\dfrac{1}{x^2(x+1)(x^2+1)}$.

La proposition donne l'existence et l'unicité de $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tel que

$$\frac{1}{X^2(X+1)(X^2+1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{dX+e}{X^2+1}.$$

En multipliant par X^2, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)(X^2+1)} = aX + b + \frac{cX^2}{X+1} + \frac{dX^3+eX^2}{X^2+1}.$$

En spécialisant en $X=0$, on obtient $b=1$.

En multipliant par $X+1$, on obtient

$$\frac{1}{X^2(X^2+1)} = \frac{a(X+1)}{X} + \frac{b(X+1)}{X^2} + c + \frac{(dX+e)(X+1)}{X^2+1}.$$

En spécialisant en $X=-1$, on obtient $c=\frac{1}{2}$.

En multipliant par X^2+1, on obtient

$$\frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{a(X^2+1)}{X} + \frac{b(X^2+1)}{X^2} + \frac{c(X^2+1)}{X+1} + dX + e.$$

En spécialisant en $X=i$, on obtient

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{1+i} = di + e.$$

Par identification partie réelle et partie imaginaire (d, e sont réels), il en résulte $d=\frac{1}{2}$ et $e=-\frac{1}{2}$.

On a donc

$$\frac{1}{X^2(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}}{X^2+1}.$$

En spécialisant en $X=1$ à gauche et à droite, on obtient directement $a=-1$, soit

$$\boxed{\frac{1}{X^2(X+1)(X^2+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}}{X^2+1}.}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{x^2(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x
\end{aligned}$$

Exemple 2⋆⋆ :

Calcul d'une primitive de $\dfrac{8}{x^4+4}$.

Factorisons dans $\mathbb{R}$ le dénominateur X^4+4.

Les racines de X^4+4, sont les racines 4-ème de -4, soit $\sqrt{2}e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$. On a donc

$$X^4+4 = (X-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}).$$

En rassemblant les conjugués deux à deux, on obtient

$$\begin{aligned}
X^4+4 &= (X-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}) \\
&= (X^2-2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4})X+2)(X^2-2\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{4})X+2) \\
&= (X^2-2X+2)(X^2+2X+2).
\end{aligned}$$

La proposition principale nous donne l'existence et l'unicité de $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\frac{8}{X^4+4}=\frac{aX+b}{X^2-2X+2}+\frac{cX+d}{X^2+2X+2}.$$

En regroupant au même dénominateur à droite, on obtient

$$\frac{8}{X^4+4}=\frac{(a+c)X^3+(2a-2c+b+d)X^2+(2a+2c+2b-2d)X+2b+2d}{(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)}.$$

En identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a-2c+b+d=0 \\ 2a+2c+2b-2d=0 \\ 2b+2d=8 \end{cases}.$$

Par substitutions sucessives, on obtient alors

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+d=0 \\ 2b-2d=0 \\ 2b+2d=8 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+d=0 \\ b=d \\ 4b=8. \end{cases}$$

On a donc $b=d=2$, $a=-1$ et $c=1$, soit

$$\frac{8}{X^4+4}=\frac{-X+2}{X^2-2X+2}+\frac{X+2}{X^2+2X+2}.$$

Calculons séparément les primitives des 2 termes de la somme, comme le numérateur est de degré 1, on cherche à faire apparaître une forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)
\end{aligned}$$

Rappel : C'est une méthode qui se généralise dans tous les cas d'éléments simples avec un polynôme de degré 2 irréductible au dénominateur. On abaisse le degré du numérateur en faisant apparaître une forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, on a alors à calculer une primitive de $\dfrac{1}{x^2+ax+b}$ avec $a^2-4b<0$ et par un changement de variable affine (ici $x+1$), on se ramène à une dérivée de arctan. Mettre sous forme canonique

$$x^2+ax+b=(x+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}=(b-\frac{a^2}{4})(X^2+1),$$

où $X=\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$.)

Da manière similaire, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x+2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1)
\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\int \frac{8}{x^4+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+\arctan(x-1).}$$

Pour des exercices d'applications sur les calculs de primitives, utiliser la feuille d'exercices sur les intégrales.

Annexe

Proposition 5. *Soit $\frac{A}{B}$ une fraction sous forme irréductible de $\mathbb{K}(X)$ avec $\deg A < \deg B$, on suppose que la factorisation en produit de polynômes irréductibles de Q est*

$$B = \prod_{k=1}^{m} Q_k^{n_k},$$

où $Q_1, \cdots, Q_m$ sont des polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts, alors R se décompose de manière unique sous la forme

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{H_{k,i}}{Q_k^i},$$

où pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ et $i \in [\![1, n_k]\!]$, $H_{k,i} \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg H_{k,i} < \deg Q_k$.

Existence :

La démonstration de cette découpe en plusieurs étapes. Démontrons un premier lemme :

Lemme 1. *Si $\frac{A}{B}$ est une fraction de $\mathbb{K}(X)$ ($A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$) avec*

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B_1 B_2},$$

où $B_1, B_2 \in \mathbb{K}[X]$ sont tel que $\deg A < \deg B_1 + \deg B_2$ et $B_1 \wedge B_2 = 1$, alors il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg A_1 < \deg B_1$ et $\deg A_2 < \deg B_2$ tel que

$$\frac{A}{B_1 B_2} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}.$$

Preuve :

Comme $B_1 \wedge B_2 = 1$, par Bezout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$, tel que

$$UB_1 + VB_2 = 1.$$

En multipliant par A, on a donc

$$AUB_1 + AVB_2 = A.$$

On peut effectuer les divisions euclidiennes de AU par B_2 et de AV par B_1. On a donc

$$AU = Q_2 B_2 + R_2 \qquad \text{avec} \deg R_2 < \deg B_2$$

$$AV = Q_1 B_1 + R_1 \qquad \text{avec} \deg R_1 < \deg B_1.$$

On a donc

$$A = AUB_1 + AVB_2 = (Q_2 B_2 + R_2)B_1 + (Q_1 B_1 + R_1)B_2 = B_1 B_2 (Q_2 + Q_1) + R_2 B_1 + R_1 B_2.$$

Par hypothèse, on a $\deg A < \deg B_1 + \deg B_2$.

Puis par construction, on a $\deg R_2 B_1 + R_1 B_2 < \deg B_1 + \deg B_2$.

Il en résulte que $\deg B_1B_2(Q_2+Q_1) < \deg B_1 + \deg B_2$, donc nécessairement $Q_2+Q_1=0$.

On en déduit que

$$A = R_2B_1 + R_1B_2.$$

Ce qui implique

$$\frac{A}{B_1B_2} = \frac{R_2}{B_2} + \frac{R_1}{B_1},$$

avec $\deg R_1 < \deg B_1$ et $\deg R_2 < \deg B_2$.

On a donc le résultat voulu en posant $A_1 = R_1$ et $A_2 = R_2$.

Application du lemme 1 :

Grâce aux hypothèses sur la factorisation de B, les facteurs sont premiers entre eux, on peut donc appliquer par récurrence ce lemme à la fraction

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{\prod_{k=1}^{m} Q_k^{n_k}}.$$

On obtient

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{Q_k^{n_k}},$$

où pour $k \in [\![1,m]\!]$, $\deg A_k < \deg Q_k^{n_k} = n_k \deg Q_k$.

Lemme 2. *Soient A un élément de $\mathbb{K}[X]$, Q un élément de $\mathbb{K}[X]\backslash\mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, tel que* $\deg P < n \deg Q$*, alors il existe un unique $(P_0, \cdots, P_{n-1}) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,* $\deg P_i < \deg Q$ *et*

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cdot Q^i.$$

Preuve :

Existence : On le démontre par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, comme $\deg A < \deg Q$, on a directement que le polynôme $P_0 = A$, convient.

Hérédité :

Supposons la propriété vrai au rang n.

Soit A un polynôme tel que $\deg A < (n+1)\deg Q$, par la division euclidienne, il existe $A_1, A_0 \in \mathbb{K}[X]$

$$A = A_1Q + A_0$$

avec $\deg A_0 < \deg Q$. Par opération sur les degrés, on a $\deg A_1 < n \deg Q$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, il existe $(\tilde{P}_0, \cdots, \tilde{P}_{n-1})$ tel que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg \tilde{P}_i \leq \deg Q$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{P}_i \cdot Q^i = A_1$.

Si on pose $(P_0, P_1, \cdots P_n) = (A_0, \tilde{P}_0, \cdots, \tilde{P}_{n-1})$, par construction, on a bien pour tou t$k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i \leq \deg Q$ et

$$A = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot Q^i.$$

Unicité :

Supposons $(P_0, \cdots, P_{n-1}), (H_0, \cdots, H_{n-1}) \in \mathbb{K}[X]$, tel que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg P_k < \deg Q$ et $\deg H_k < \deg Q$ et

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} P_k \cdot Q^k = \sum_{k=0}^{n-1} H_k \cdot Q^k.$$

On a donc

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} (P_k - H_k) \cdot Q^k.$$

Supposons qu'il existe k tel que $P_k - H_k \neq 0$. Prenons k_0 le plus petit entier vérifiant cette propriété, on a donc

$$0 = \sum_{k=k_0}^{n-1} (P_k - H_k) \cdot Q^k,$$

d'où

$$(H_{k_0} - P_{k_0}) Q^{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (P_k - H_k) \cdot Q^k,$$

Par intégrité, on a donc

$$H_{k_0} - P_{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{n-1} (P_k - H_k) \cdot Q^{k-k_0},$$

Le membre de gauche est non nul et de degré strictement plus petit que $\deg Q$ et le membre de droite est divisible par Q. Il y a une contradiction, il n'existe donc pas de k tel que $P_k - H_k \neq 0$. La décomposition est donc unique.

Application du lemme 2 :

On a déjà démontré que

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{Q_k^{n_k}},$$

avec $A_k < n_k \deg Q_k$.

Grâce au lemme pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, il existe un unique $(P_{k,0}, \cdots, P_{k,n_k-1}) \in \mathbb{K}[X]^{n_k}$ tel que pour tout $i \in [\![0, n_k - 1]\!]$, $\deg P_{k,i} < \deg Q_k$ et

$$A_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} P_{k,i} \cdot Q_k^i.$$

On obtient alors

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n_k-1} P_{k,i} \cdot Q_k^i}{Q_k^{n_k}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{P_{k,i}}{Q_k^{n_k-i}}.$$

Soit par symétrie, de la deuxième somme,

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{P_{k,n_k-i}}{Q_k^i},$$

On pose alors $H_{k,i} = P_{k,n_k-i}$ et on a bien pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ et tout $i \in [\![1, n_k]\!]$, $\deg H_{k,i} < \deg Q_k$ et

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{H_{k,i}}{Q_k^i}.$$

Conséquence :

Cette proposition donne directement les résultats sur la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$. On factorise en irréductibles le dénominateur de la fraction pour pouvoir ensuite découper la fraction selon chaque puissance d'irréductibles, sur $\mathbb{C}$ les polynômes de degré 1 et sur $\mathbb{R}$ les polynômes de degré et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.