Fonctions usuelles

On admet pour ce chapitre les résultats usuels suivants (ils seront démontrés plus tard dans l'année) :

Proposition 1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors il existe une fonction F dérivable sur I, tel que*
$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x),$$
on appelle une telle fonction primitive de f, si de plus on impose la valeur de F en un point de I, cette fonction est unique. On a pour tout x_0 élément de I, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en x_0.

Remarques : Si on impose une condition sur la valeur en un point de I, la primitive est unique. Cette condition d'unicité sera démontré dans le chapitre de dérivation, pour l'existence de la primitive, on attendra le chapitre d'intégration.

Proposition 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $[a, b] \subset I$, alors*

(i) $\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$

(ii) $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

1.1 Logarithme népérien

1.1.1 Définition :

On définit la fonction logarithme (népérien) noté ln comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1, c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

1.1.2 Propriétés

Proposition 3. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(ii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

(iii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(iv) $\ln(x^n) = n \ln x.$

Proposition 4 (Variations et limites)**.** *La fonction* ln *vérifie*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$, *la fonction* ln *est donc strictement croissante*

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(iii) $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

(iv) $\lim_{x \to +0^+} \ln x = -\infty$

(v) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Remarque :

Les points (ii) et (iv) justifient que la courbe de ln à une branche parabolique d'axe Ox en $+\infty$.

1.2 Fonction exponentielle

1.2.1 Définition

La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, on définit sa fonction réciproque noté exp de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^{+*}$.

1.2.2 Propriétés

On transfert l'ensemble des propriétés du logarithme

Proposition 5. *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, on a*

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

(ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(iii) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Proposition 6 (Variations et limites)**.** *La fonction* exp *vérifie :*

(i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

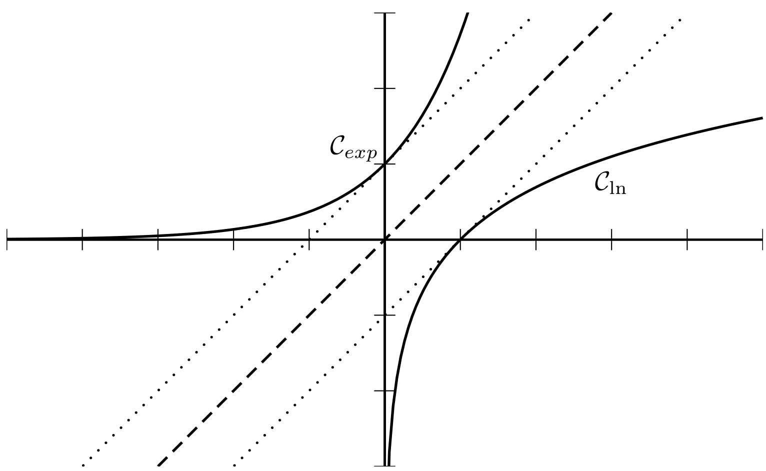
(iv) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$

(v) $(\exp(x))' = \exp(x)$.

Remarque :

Par symétrie, la branche parabolique d'axe Ox en $+\infty$ de ln devient une branche parabolique d'axe Oy en $+\infty$. De même, l'asymptote verticale en 0, devient une asymptote horizontale en $-\infty$.

On peut tracer les courbes de ln et exp sur le même graphe, elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.



1.3 Logarithme en base a

1.3.1 Définition

Soit $\in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ le logarithme en base a noté $\log_a$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

La fonction $\log_a$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque est $x \mapsto \exp(x \ln a)$.

Si $x = n$ est un nombre entier, on a $\exp(n \ln a) = a^n$. On étendra la notation a^x pour $a > 0$ et x réel par $a^x = \exp(x \ln a)$ et notera $e^x = \exp(x)$.

La valeur de e étant par extension des définitions $\exp(1)(\approx 2.718)$.

Les propriétés du logarithme et de l'exponentielle se transmettent

Proposition 7. *Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on a*

(i)	$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	(v)	$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad a^{x+y} = a^x a^y$
(ii)	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$	(vi)	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
(iii)	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \log_a(x^n) = n \log_a x$	(vii)	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad a^{nx} = (a^x)^n$
(iv)	$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	(vii)	$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \mapsto a^x)'(x) = (\ln a)\, a^x.$

1.4 Fonctions puissances

1.4.1 Définition

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$

$$x \mapsto x^a = e^{a \ln x}.$$

Cette définition prolonge naturellement la puissance entière.

1.4.2 Propriétés

Des propriétés de l'exponentielle et du logarithme découlent

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a, b \in \mathbb{R},$

(i)	$x^a y^a = (xy)^a$	(iv)	$1^a = 1$
(ii)	$x^a x^b = x^{a+b}$	(v)	$x^0 = 1$
(iii)	$(x^a)^b = x^{ab}$	(vi)	$\ln(x^a) = a \ln x.$

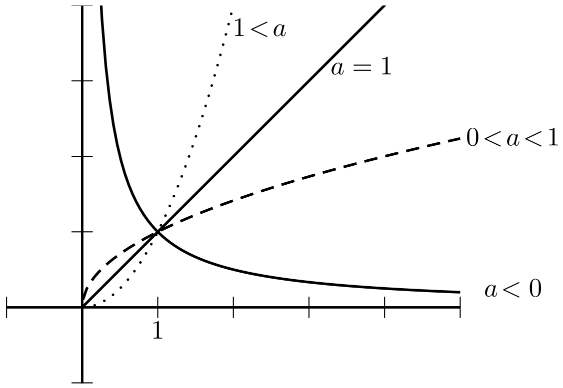
1.4.3 Variations et réciproque

Proposition 8. *Soit la fonction $f = x \mapsto x^a$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = a \cdot x^{a-1},$$

on en déduit f strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Quelques courbes :



Remarques :

1. Les positions comparées des courbes en fonction de la valeur de a sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$ servent fréquemment :

   « Savoir dire quelle courbe est au dessus de quelle courbe. »

2. Pour dériver ou calculer les limites d'expression de la forme $u(x)^{v(x)}$, on repasse généralement à la forme exponentielle $e^{v(x)\ln u(x)}$.

Proposition 9. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto x^a$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et sa réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$.*

Dans le cas où $a = n \in \mathbb{N}$, on la note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, cette réciproque qui se prolonge en une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 10 (Règles de comparaisons usuelles)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, alors on a*

$$\begin{array}{lll|lll} (i) & \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 & & (ii) & \lim\limits_{x\to 0^+} x^a\,|\ln x|^b = 0 \\ (ii) & \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0 & & (iv) & \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a\,e^{bx} = 0. \end{array}$$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Cosinus et sinus hyperboliques

2.1.1 Définition

On définit le cosinus hyperbolique noté cosh ou ch et le sinus hyperbolique noté sinh ou sh , comme la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

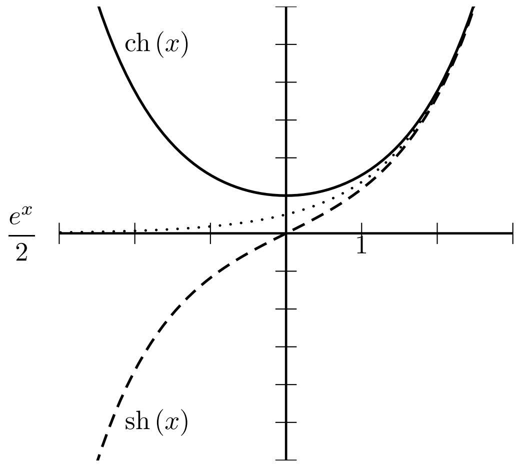
2.1.2 Propriétés et courbes

Proposition 11. *Soient $x \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$\begin{array}{ll|ll} (i) & \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x) = e^x & (iv) & \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \\ (ii) & (\mathrm{ch}\,)'(x) = \mathrm{sh}\,(x) & (v) & (\mathrm{sh}\,)'(x) = \mathrm{ch}\,(x) \\ (iii) & \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\,(x) - \dfrac{e^x}{2} = 0^+ & (vi) & \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\,(x) - \dfrac{e^x}{2} = 0^-. \end{array}$$

Courbes :

En utilisant la parité et le fait que $\operatorname{ch} x > 0$, on obtient



2.2 Tangente hyperbolique

2.2.1 Définition

On définit la tangente hyperbolique noté tanh ou th par

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)},$$

elle définit sur $\mathbb{R}$ et c'est une fonction impaire.

2.2.2 Propriétés et courbes

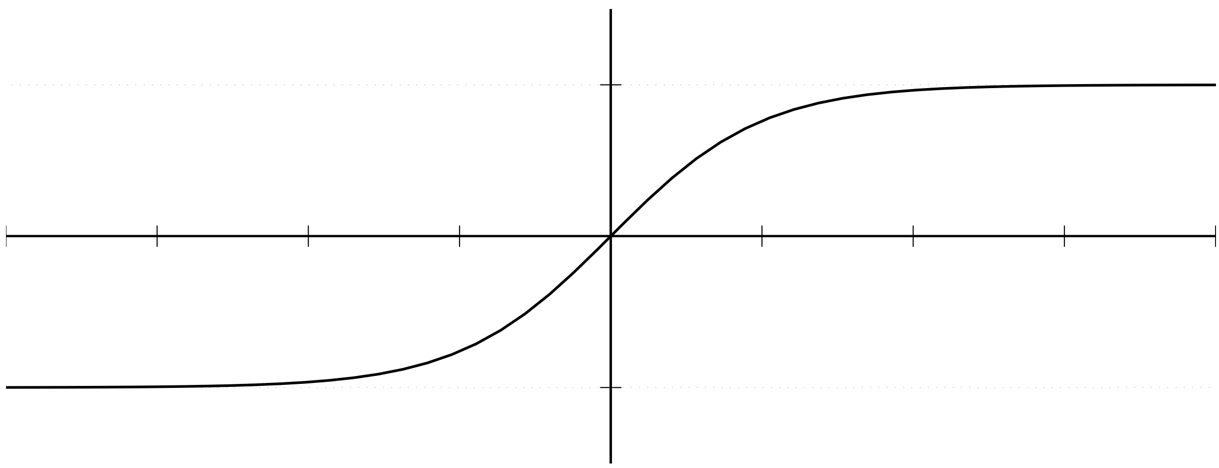
Proposition 12. *Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a*

(i) $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1^-$.

Courbes :

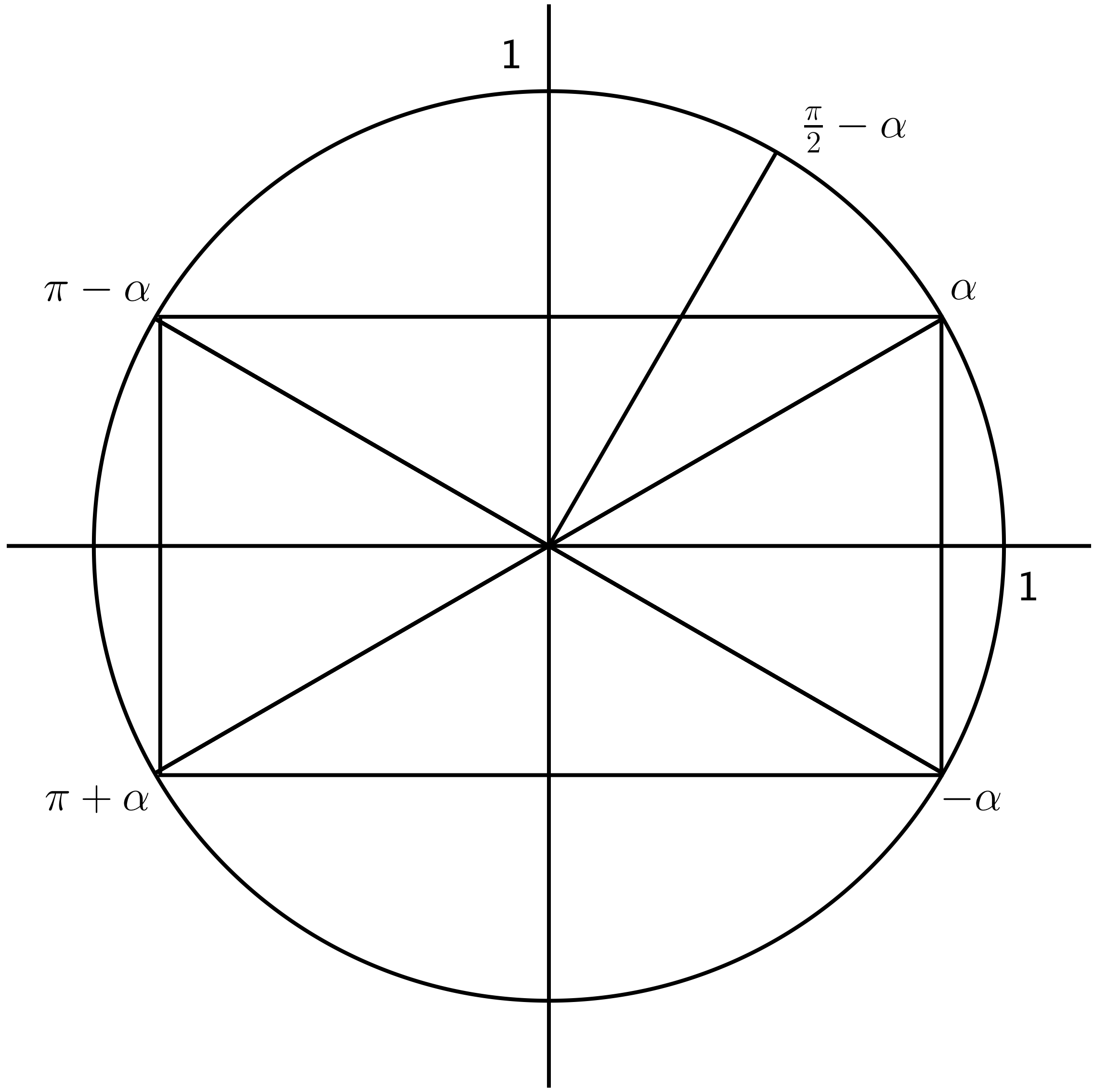
En utilisant l'imparité et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) > 0$, on obtient



3 Fonctions circulaires

3.1 Cercle trigonométrique

Si on ne retrouve rapidement pas les relations de symétrie, faire un dessin (dans sa tête ou au brouillon ou dans la marge de sa copie).



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$

Liste non exhaustive, par exemple, chercher à exprimer $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$.

Valeurs remarquables à connaître :

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non déf.

3.2 Formulaire et limites

A connaître par coeur ou savoir retrouver la formule utile pour le problème posé en un temps raisonnable. Le plus simple étant de s'entraîner à reconstruire le formulaire à partir d'une formule (genre la formule $\cos(a+b) = \cdots$), on finit par le connaître.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$
$$\sin^2 a = \tfrac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a = \tfrac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\tan(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$$
$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$
$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Dérivées :

On a

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\sin)'(x) = \cos(x)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos)'(x) = -\sin(x)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Limites usuelles :

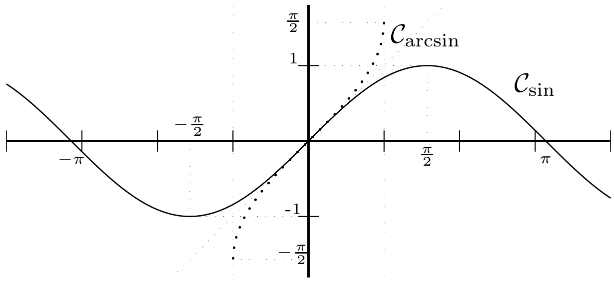
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

On leur donnera une forme plus efficace dans le cours sur les développements asymptotiques. Il est, par contre, intéressant de leur donner une sens géométrique en les reliants à la dérivation.

3.3 Fonctions circulaires réciproques

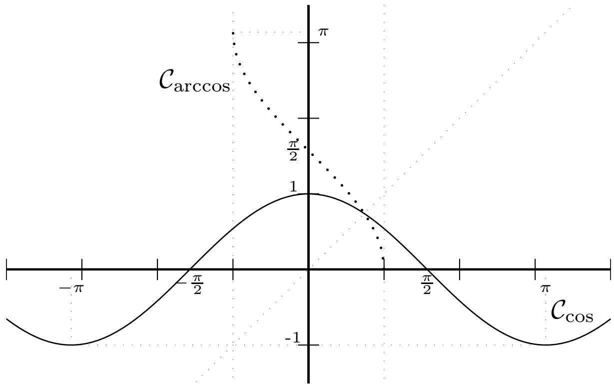
3.3.1 Fonction arcsinus

La fonction sinus est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. On note arcsin sa réciproque appelée fonction arc sinus, elle est définie de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La courbe de la fonction arcsinus a des tangentes verticales en -1 et 1.



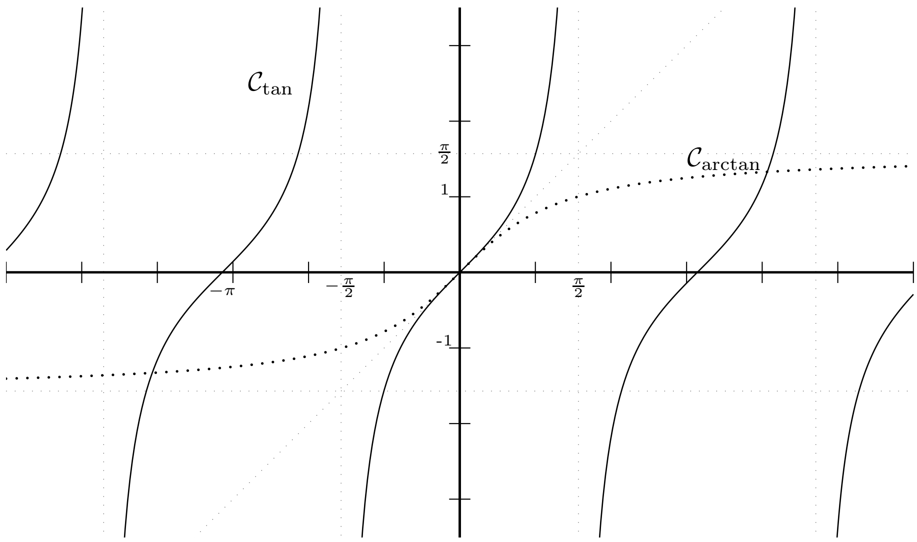
3.3.2 Fonction arccos

La fonction cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On note arccos sa réciproque appelée arc cosinus, elle est définie de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La courbe de la fonction arcsinus a des tangentes verticales en -1 et 1.



3.3.3 Fonction arctan

La fonction tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$. On note arctan sa réciproque appelée fonction arc tangente, elle est définie de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction arctan est dérivable sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.



3.4 Quelques formules

3.4.1 Composition

Celle qui découle directement des définitions des fonctions circulaires réciproques :

(i) $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(x)) = x \quad \text{et} \quad \sin(\arcsin(x)) = x$

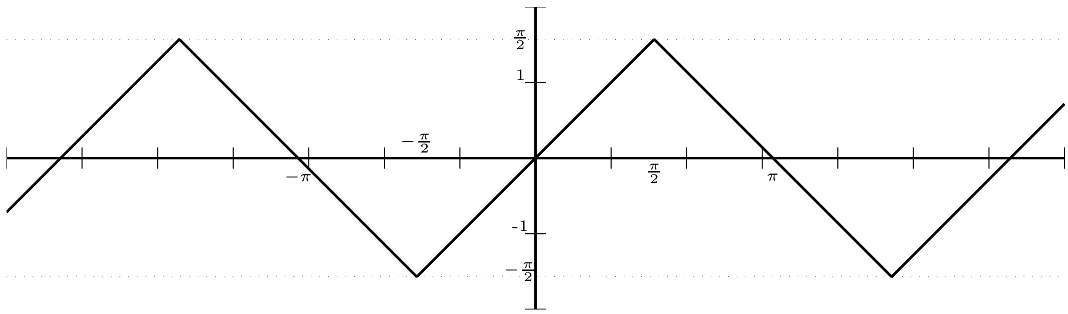
(ii) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

(iii) $\forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x$

(v) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan(x)) = x$

Remarque: Il faut bien faire attention aux ensembles de définition du fait que les fonctions circulaires ne sont pas des bijections. Par exemple, $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est valable que pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \arcsin(\sin(x))$ donne la courbe suivante.



Les suivantes ne sont pas à apprendre, mais à savoir retrouver :

(i) $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(iii) etc...

Remarques:

1. La première ligne sert pour le calcul des dérivées de arccos et arcsin.
2. Cette liste est, comme indiqué, très loin d'être exhaustive. L'important est de manipuler le formulaire trigonométrique et les domaines de définition pour pouvoir lever les indéterminations en cas de passage à la racine carré. On pourra, par exemple simplifier, $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ et $\tan(2\arccos(x))$.

3.4.2 Formulaire des fonctions circulaires réciproques

(i) $\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sg}(x)\frac{\pi}{2}.$

Remarques:

1. Le plus simple pour démontrer les différentes formules est de dériver et regarder sur les différents intervalles du domaine de définition.
2. La formule (ii) sert en particulier pour l'étude du comportement à l'infini de arctan, on se ramène au comportement en 0 que l'on sait beaucoup mieux étudier (On utilisera cette formule dans les études asymptotiques).