Fonctions convexes

Dans la suite, sauf précision contraire, I sera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ avec des bornes finies ou infinies et la fonction f sera définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

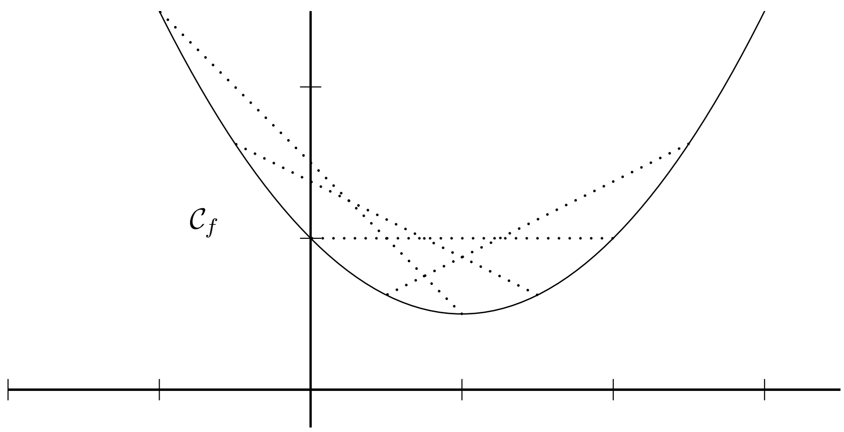
1 Fonctions convexes

Définition :

Une fonction f est dite convexe sur l'intervalle I, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

La représentation géométrique de cette propriété, si la fonction f est convexe, les segments reliant deux points de la courbe f (les cordes) sont au dessus de la courbe de f.



On dit qu'une fonction f est concave sur I, si $-f$ est convexe sur I. Pour une fonction concave, on a que les segments reliant deux points de la courbe f (les cordes) sont en dessous de la courbe de f.

2 Premières propriétés

Lemme 1. *Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ alors l'application φ définie de $[0,1]$ dans $[x_1, x_2]$ par $\varphi(\lambda) = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ est une bijection.*

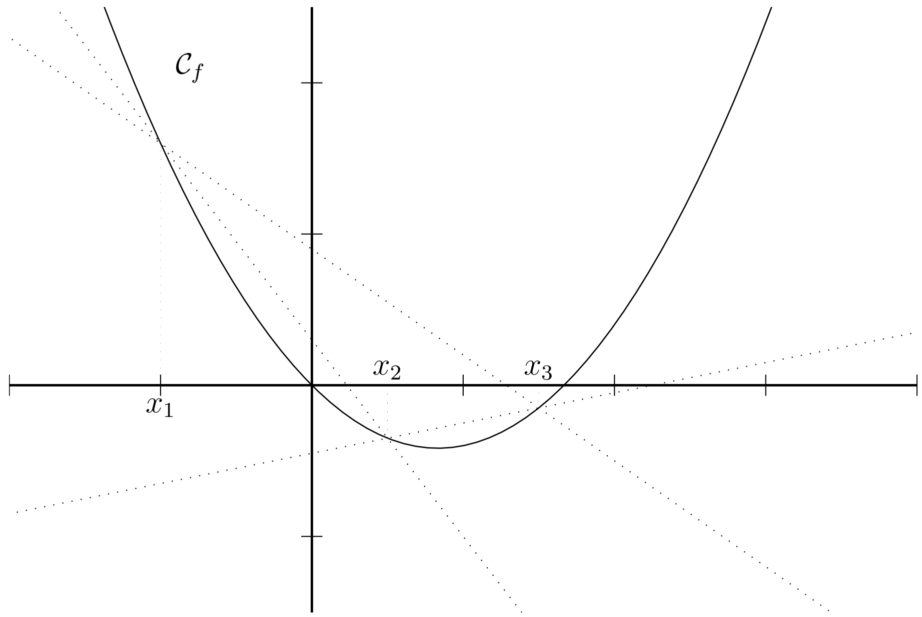
Remarque : Cela permet de paramétrer tout point de y du segment $[x_1, x_2]$ sous la forme $y = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ avec $\lambda \in [0,1]$.

Proposition 1. *Soit f une fonction convexe sur I et $x_1 < x_2 < x_3$ points de I, alors on a*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Réciproquement, si une fonction f vérifie l'inégalité de gauche (ou de droite) pour tous $x_1 < x_2 < x_3$ points de I, alors f est convexe.

On peut voir ce résultat graphiquement, les pentes des cordes de la courbe sont de plus en plus fortes.



Lemme 2. *Soient* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n$ *et* $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*, alors*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \in I.$$

Remarque : Le cas le plus fréquent d'utilisation est, quand $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et on a alors

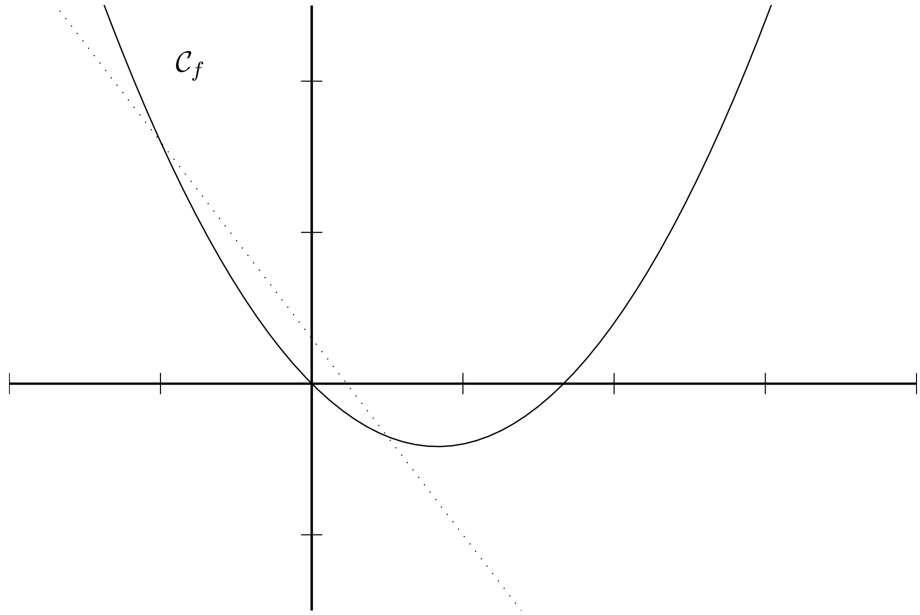
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I.$$

Proposition 2 (Inégalité de Jensen). *Soient f une fonction convexe sur I,* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n$ *et* $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$*, tel que* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$*, alors*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Proposition 3 (Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.). *Soient f une fonction convexe sur I, $a < b$ deux points de I et D la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (Une sécante à la courbe de f), alors pour le point $(x, f(x))$ est en dessous de la droite D, si $x \in [a, b]$, au dessus sinon.*

Graphiquement, on a donc



Proposition 4. *Soient f une fonction convexe sur I et a un point de I qui n'est pas une borne de I, alors f est continue en a.*

Remarque : Les seules points de discontinuité potentielle pour une fonction convexe sont les bornes de l'intervalle.

3 Convexité et dérivées

Proposition 5. *Soit f une fonction dérivable sur I, il y a équivalence entre*

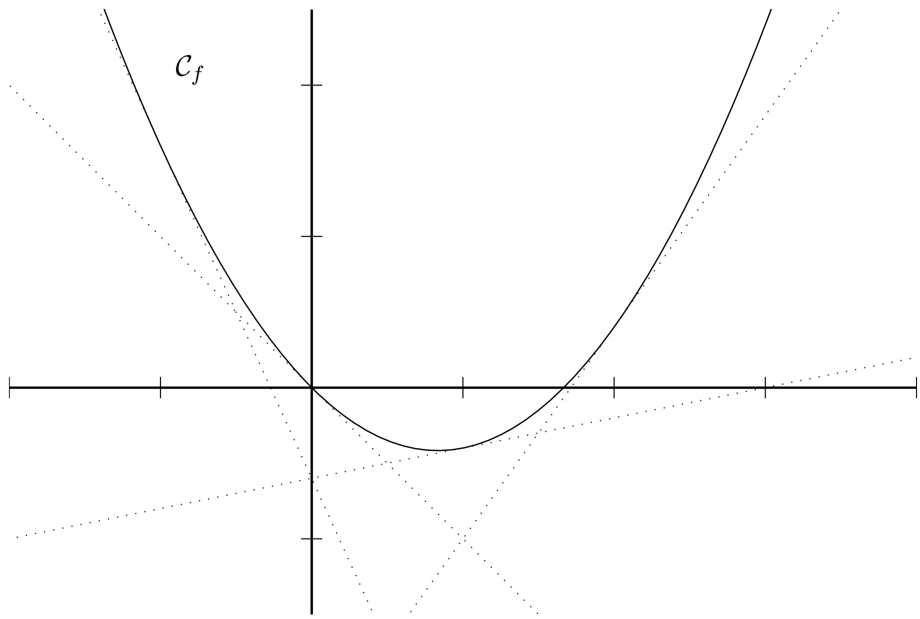
(i) La fonction f est convexe sur I.

(ii) La fonction f' est croissante sur I.

Proposition 6. *Soit f une fonction dérivable et convexe sur I, alors pour tout $a, x \in I$, on a*

$$f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x).$$

C'est-à-dire la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes.



Proposition 7. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, il y a équivalence entre*

(i) La fonction f est convexe sur I.

(ii) La fonction f'' est positive sur I.

4 Quelques applications de la convexité

4.1 Inégalités usuelles

Les inégalités suivantes sont applications de la convexité, elles sont classés par ordre décroissantes d'importance (Les deux premières sont d'utilisations très fréquentes, les deux dernières ne sont pas une priorité)

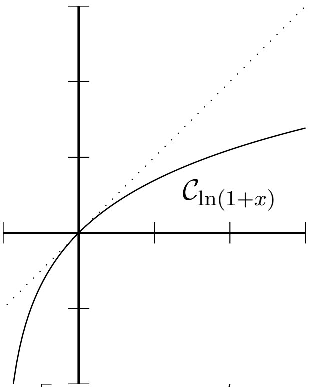
(i) $\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leq x$

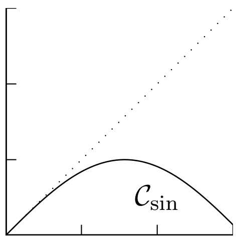
(ii) $\forall x \in [0, +\infty[, \qquad \sin(x) \leq x$

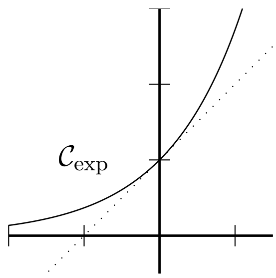
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x+1 \leq e^x$

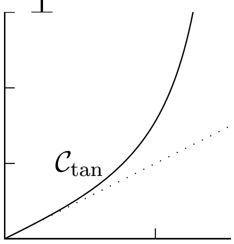
(iv) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \qquad x \leq \tan(x)$

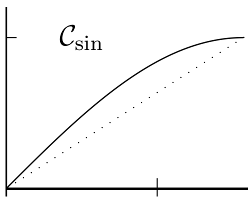
(v) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$











4.2 Deux inégalités classiques

Proposition 8 (Inégalité arithméticogéométrique). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$, on a*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Proposition 9 (Inégalité de Hölder). *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4.3 Convexité, concavité et points d'inflexions

L'étude des domaines de convexité et de concavité d'une fonction donne une information sur le comportement de la courbe d'une fonction.

Proposition 10. *Soient f une fonction dérivable sur I, $a < b < c$ 3 points de I tel que f est convexe sur $[a, b]$ et concave sur $[b, c]$ (ou concave sur $[a, b]$ et convexe sur $[b, c]$), alors la courbe de f traverse sa tangente en b. On dit que la courbe de f a un point d'inflexion au point $(b, f(b))$.*

Exemple :

Etude de la courbe de f définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 30$.

On calcule $f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 54$. Une recherche des racines entières donne $f'(x) = 4(x - \frac{3}{2})(x - 3)^2$.

Puis $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72 = 12(x - 2)(x - 3)$.

Cela nous permet d'obtenir les tableaux suivants

x	0		$\frac{3}{2}$		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	30	$\searrow$	$\frac{21}{16}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6

x		2		3	
Courbe de f	Convexe	Inflexion	Concave	Inflexion	Convexe

On peut regrouper l'ensemble des informations sur une courbe.