Fonctions de deux variables

Exercice 1.

Etudier l'existence et la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$1)\ f(x,y) = \frac{x^3}{y} \qquad 2)\ f(x,y) = \frac{xy}{x-y} \qquad 3)\ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad 4)\ f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$$

$$5)\ f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 6)\ f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} \qquad 7)\ f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad 8)\ f(x,y) = x^y$$

Exercice 2.

Soit D une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient A et B deux points de D et y un réel tels que $f(A) \leq y \leq f(B)$. Montrer qu'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Comment pourrait-on appeler ce résultat ?

Exercice 3.

Calculer les dérivées partielles, en précisant quand elles existent, des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x,y) = x^y \text{ (avec } x > 0) \qquad 2)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad 3)\ f(x,y) = x\sin(x+y)$$

Exercice 4.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Montrer que f vérifie la relation : $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 5.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \int_x^y \varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en ses deux variables x et y. On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1+t^2)$. Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(u^2+v^2, uv)$.

Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ homogène de degré n ce qui veut dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

1. Montrer que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$.
2. On suppose que $n \geq 1$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.

Exercice 9.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes et déterminer s'ils sont globaux :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $g(x,y) = x^3 + y^3$
3. $h(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$