Familles sommables

Exercice 2 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 3 (*)

Étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{1+m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 4 (*)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Montrer que la famille $(\sqrt{a_ib_i})_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 6 (**)

Soient $a>1$ et $b>1$. Discuter l'existence de $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{a^m+b^n}$.

Exercice 7 (*)

Justifier l'existence puis calculer la somme de $\displaystyle\sum\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-n}}{k(k+1)}\right)$.

Exercice 9 (**)

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^{2n}}$$