# Probabilités

**Exercice 1.**

Dans un jeu de 52 cartes, on tire

1. 3 cartes successivement sans remise.
2. 3 cartes successivement avec remise.
3. 3 cartes simultanément.

Dans les trois cas, quelle est la probabilité d'avoir 3 cartes de la même couleur.

**Exercice 2.**

Une urne contient $n$ boules numérotés de 1 à $n$.

1. Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$, on tire $k$ boule(s) de l'urne avec $k \in [\![1, n]\!]$.
   Quelle est la probabilité d'avoir tiré la boule numérotée $i$ ?
2. On tire une poignée de l'urne (c'est-à-dire $k$ boules de l'urne avec $k \in [\![1, n]\!]$), toutes les poignées sont équiprobables. On note $X$ la somme des valeurs des boules d'une poignée. Calculer l'espérance et la variance de $X$.
   *On pourra introduire la famille de variables aléatoires $(X_i)$ définie sur les poignées $\omega$, tel que $X_i(\omega) = 1$ si $i \in \omega$ 0 sinon.)*

**Exercice 3.**

Une urne contient 4 boules rouges, 3 noires et une blanche.

1. On tire en une seule fois trois boules. Déterminer la probabilité d'avoir :
   (a) au moins deux boules rouges.
   (b) au moins deux boules de la même couleur.
   (c) une boule de chaque couleur.
2. Traiter les mêmes questions dans le cas d'un tirage avec remise.

**Exercice 4.** On lance 5 dés non pipés à 6 faces :

Calculer la probabilité d'avoir :

1. au moins deux faces identiques.
2. d'avoir au moins une face multiple de 3 et au moins une face paire.

**Exercice 5.** On a $n$ urnes , l'urne $k$ contient $k$ boules blanches et $n + 1 - k$ boules noires. On choisit une urne puis une boule. La probabilité de choisir l'urne $k$ est $k\alpha$.

Déterminer :

1. la constante $\alpha$.
2. la probabilité d'avoir une boule noire.
3. la probabilité que la boule vienne de l'urne $k$ sachant qu'elle est noire.

**Exercice 6.**

Dans un zoo une otarie est dressée pour rattraper un ballon.

Si l'otarie vient de rattraper le ballon elle le rattrape encore avec une probabilité de $\frac{3}{10}$ ; si elle vient de le rater elle le rattrape avec une probabilité de $\frac{9}{10}$. Au premier coup l'otarie rattrape le ballon. Soit $B_n$ l'évènement l'otarie rattrape le ballon lors de l'essai $n$ et soit $p_n$ sa probabilité

Trouver une formule de récurrence pour calculer $p_n$ et calculer $p_n$ et sa limite.

**Exercice 7.**

On a 3 dés :

(i) Un dé normal non pipé à 6 faces.

(ii) Un dé non pipé à 6 faces avec 3 faces numéroter 1 et 3 faces numéroter 6.

(iii) Un dé pipé dont la face 6 a une probabilité de $\frac{1}{2}$ et les 5 autres faces (1,2,3,4,5) ont même probabilité.

On tire une boule dans une urne contenant 2 boules 1 , 1 boule 2 et 1 boule 3.

Le numéro de la boule indique le dé choisit ; on lance alors le dé 3 fois. Calculer la probabilité d'avoir au moins une fois la face 1.

**Exercice 8.**

Dans un lot de pièces usinées, il y a 4% de pièces défectueuses. Le test de contrôle subi par ces pièces n'est pas parfait : seulement 95% des mauvaises pièces sont rejetées, et 97% des bonnes sont acceptées. On teste une pièce choisie au hasard.

Quelle est la probabilité pour que :

1. le résultat du test soit erroné.
2. la pièce soit bonne sachant qu'elle est rejetée.
3. la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée.

**Exercice 9.**

Monsieur Dubouchon pêche à la ligne dans son étang où ne vivent que trois pauvres carpes et sept pauvres tanches. Il a décidé de pêcher jusqu'à ce qu'il ait pris quatre poissons. En supposant que chacun des poissons ait à chaque fois la même probabilité de se faire prendre et que les poissons aient tous des poids différents, calculer les probabilités des évènements suivants :

**A :** « le premier poisson pris est une carpe »

**B :** « les deux premiers poissons pris sont des carpes »

**C :** « le second poisson pris est une carpe »

**D :** « l'un exactement des quatre poissons pris est une carpe »

**E :** « au moins un des quatre poissons pris est une carpe »

**F :** « les 4 poissons sont de plus en plus gros »

**Exercice 10.**

Un insecte se promène sur un triangle équilatéral $ABC$. A l'instant $t = 0$ , il est en $A$ . A chaque instant, il se déplace du sommet sur lequel il se trouve vers chacun des deux autres sommets restants avec probabilité égale à $\frac{1}{2}$ . Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , on note respectivement $A_n, B_n$ et $C_n$ les événements « l'insecte se trouve en $A$ (respectivement $B$ ou $C$ ) à l'instant n . ».

On pose $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$

1. Etablir une expression de $a_{n+1}, b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n$ et $c_n$.
2. Déterminer $a_n, b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$ et préciser les limites de ces suites lorsque $n$ tend vers $+\infty$. (*On pourra introduire une matrice)*