Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ considéré sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Soient un corps $\mathbb{K}$ et E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et d'une loi de multiplication externe, c'est-à-dire une application $\cdot$

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x \end{array}$$

La structure $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), si

(a) $(E, +)$ a une structure de groupe commutatif (ou groupe abélien).
   (i) La loi $+$ est associative : $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.
   (ii) La loi $+$ est commutative : $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x$.
   (iii) Il existe un élément neutre 0_E : $\forall x \in E, \quad x + 0_E = x$.
   (iv) Pour tout élément x de E, il existe un symétrique pour $+$ noté $-x$: $x + (-x) = 0_E$.

(b) La multiplication externe vérifie $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$ et $\forall x, y \in E$:

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \qquad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$$

Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires. On omet en général le symbole $\cdot$, $\alpha x = \alpha \cdot x$.

Remarques :

Les propriétés précédentes permettent de démontrer que pour vecteur x de E, on a $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.

On démontre rarement qu'un ensemble est un espace vectoriel en revenant à la définition générale. Le plus important, dans ce paragraphe, se situe dans la liste suivante :

Exemples de référence :

1. Le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Les n-uplets de $\mathbb{K}^n$ forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices n lignes et p colonnes forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5. L'ensemble $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions d'un ensemble quelconque I dans $\mathbb{R}$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles ($\forall f, g \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \qquad (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$).
6. L'ensemble des suites de nombres réels munit des règles usuelles forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
7. Si E est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $F = \mathcal{F}(I, E)$ des fonctions d'un ensemble quelconque I dans E forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles
$$\forall f, g \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in I, \qquad (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x).$$
.
8. Si A est une ensemble quelconque et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $F = \mathcal{F}(A, E)$ des fonctions de A dans E forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles
$$\forall f, g \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in A \qquad (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x).$$

Les exemples précédents permettent d'englober un nombre très important de cas que l'on traitera en cours comme dans les problèmes.

1.2 Propriétés

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, on appelle combinaison linéaire *à coefficients dans $\mathbb{K}$ des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ un élément de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Pour tout vecteur $x \in E$, on a $0_{\mathbb{K}} x = 0_E$.

Proposition 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par $\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E \times F, \lambda \in \mathbb{K}$,*
$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$
$$\lambda \cdot (u_1, v_1) = (\lambda_1 u_1, \lambda u_2).$$

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E stable sous les lois $+$ et $\cdot$, F est un sous-espace vectoriel de E si $(F, +, \cdot)$ possède une structure d'espace vectoriel.

Exemple :
1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, la droite $F = \{(x, y); x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la partie $F = \{f; f \in E, f(0) = 0)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2 Caractérisation

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E, les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E.
(ii) F est non vide et $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \qquad \alpha x + \beta y \in F$.
(iii) $0_E \in F$ et $\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \qquad \alpha x + \beta y \in F$.

2.3 Intersection de sous-espaces, sous-espace vectoriel engendré, somme de sous-espaces vectoriels

2.3.1 Intersection

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E (I fini ou infini), alors

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

2.3.2 Sous-espace vectoriel engendré

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E, on appelle sous-espace engendré par A, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On note ce sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}A$, $\mathrm{Vect}A$ ou $\langle A\rangle_{\mathbb{K}}$.

Si A est de cardinal et finie$A = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on a

$$\mathrm{Vect}A = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\,;\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Si une partie A de cardinal quelconque de E, alors $\mathrm{Vect}A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des sous-familles finies de A.

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}\{(1, 1)\}$ est la droite vectoriel d'équation $y = x$.
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la partie $\mathrm{Vect}\{x \mapsto 1\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.3.3 Somme de 2 sous-espaces vectoriels

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G 2 sous-espaces vectoriels de E, on définit la somme des sous-espaces vectoriels F et G notée $F + G$ par

$$F + G = \{x\,;\,x = x_F + x_G \text{ avec } x_F \in F, \quad x_G \in G\},$$

C'est un sous-espace vectoriel.

Remarque : $\star$ On a l'égalité $\mathrm{Vect}F \cup G = F + G$.

2.3.4 Somme directe

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G 2 sous-espaces vectoriels de E, si pour tout élément x de $F + G$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$, les sous-espaces vectoriels F et G sont en *somme directe* notée $F \oplus G$.

Caractérisation :

Soient F, G 2 sous-espaces vectoriels de E, on a équivalence entre

(i) F, G sont en somme directe.

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$

2.3.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G 2 sous-espaces vectoriels de E en somme directe tel que $F \oplus G = E$, alors G est un sous-espace vectoriel *supplémentaire* de F dans E.

Caractérisation :

Soient F, G 2 sous-espaces vectoriels de E, on a équivalence entre

(i) G est un supplémentaire de F dans E.

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$

Proposition 2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E, alors il existe un sous-espace vectoriel G supplémentaire de F dans E.*

3 Applications linéaires

3.1 Définition

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, f est une application linéaire de E dans F si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

On note $\mathrm{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on abrège la notation par $\mathrm{L}(E) = \mathrm{L}(E, E)$.

On appelle noyau de f noté $\operatorname{Ker} f$ la partie de E définie par $f^{-1}(\{0_F\})$.

On note $\operatorname{Im} f$ l'image directe de E par f.

Remarques :

1. Si F est le corps des scalaires (c'est-à-dire $F = \mathbb{K}$), on dit que f est une forme linéaire.
2. Si f est un élément de $\mathrm{L}(E)$, on définit les itérés de f notés :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{n+1} = f \circ f^n.$$

3.2 Propriétés

Proposition 3. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et F_1 des sous-espaces vectoriels respectivement de E et F, f une application linéaire de E dans F alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F et $f^{-1}(F_1)$* est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire 1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F alors*

(i) $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

(ii) $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Le point *(ii)* sera une méthode efficace pour justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel. Il faudra introduire une application linéaire adéquate pour l'utiliser.

Exemples :

1. Soit $E=\mathbb{R}^4$, l'ensemble des solutions de
$$x+y+z+t=0$$
est un sous-espace vectoriel de E, car c'est le noyau de la forme linéaire g définie sur E par
$$g(x,y,z,t)=x+y+z+t.$$
2. Soit $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a alors
$$F=\{f \quad ; \quad f\in E,\ f(0)=0\}$$
est un sous-espace vectoriel de E, car c'est le noyau de la forme linéaire φ définie sur E par $\varphi(f)=f(0)$.
3. Soient $E=\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $F=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$y''+2y=0$$
est un sous-espace vectoriel de E, car c'est le noyau de l'application linéaire ψ définie E dans F par $\psi(f)=f''+2f$.

Proposition 4. *Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F alors on a les équivalences suivantes :*
$$\begin{array}{rcl} f \text{ injective} & \Longleftrightarrow & \operatorname{Ker}(f)=\{0_E\} \\ f \text{ surjective} & \Longleftrightarrow & \operatorname{Im}(f)=F \end{array}$$

Proposition 5. *Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on a*
$$\begin{array}{llll} (a) & \forall f,g\in \mathrm{L}(E,F), & \forall \lambda\in\mathbb{K}, & f+\lambda g\in \mathrm{L}(E,F) \\ (b) & \forall f\in \mathrm{L}(E,F), & \forall u\in \mathrm{L}(F,G), & u\circ f\in \mathrm{L}(E,G) \\ (c) & \forall f\in \mathrm{L}(E,F), & \forall u,v\in \mathrm{L}(F,G), & (u+v)\circ f=u\circ f+v\circ f \\ (d) & \forall f,g\in \mathrm{L}(E,F), & \forall u\in \mathrm{L}(F,G), & u\circ(f+g)=u\circ f+u\circ g \end{array}$$

Sous l'hypothèse de commutation (attention en général, $f\circ g\neq g\circ f$), on généralise les formules de développement

Corollaire 2. *Soient $f,g\in \mathrm{L}(E)$ qui* **commutent** *(c'est-à-dire $f\circ g=g\circ f$), on a*
$$\forall n\in\mathbb{N},\left\{\begin{array}{ccl} (f+g)^n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^k g^{n-k} \\ f^n-g^n & = & (f-g)\circ\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}\right) \\ f^{2n+1}+g^{2n+1} & = & (f+g)\circ\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k f^k g^{2n-k}\right) \end{array}\right.$$

Définition 2. *Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F*

(a) f est un endomorphisme d'espaces vectoriels, si $E=F$

(b) f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, si f est bijective.

(c) f est un automorphisme d'espaces vectoriels, si f est un isomorphisme et un endomorphisme.

(d) E et F sont deux espaces vectoriels isomorphes si il existe un isomorphisme entre E et F.

Proposition 6. *Si f un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans F, alors f^{-1} est isomorphisme d'espaces vectoriels de F dans E.*

3.3 Structure algébrique

Ce paragraphe est une conséquence des propositions 5 et 6.

Proposition 7. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,* $\mathrm{L}(E,F)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve :

On montre que $\mathrm{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Proposition 8. $\star$ *Soit* $(\mathrm{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau.*

Explication :

Cela signifie que $(\mathrm{L}(E), +)$ est un groupe commutatif (cf. définition donnée dans celle des espace vectoriels) et que le loi de composition $\circ$ possède un élément neutre Id_E, est associative et se distribue par rapport à $+$.

Proposition 9. *L'ensemble des isomorphismes de l'espace vectoriel E est un groupe noté* $\mathrm{GL}(E)$ *(c'est un sous-groupe des bijections de E).*

3.4 Applications linéaires remarquables : les projecteurs et les symétries

3.4.1 Définition

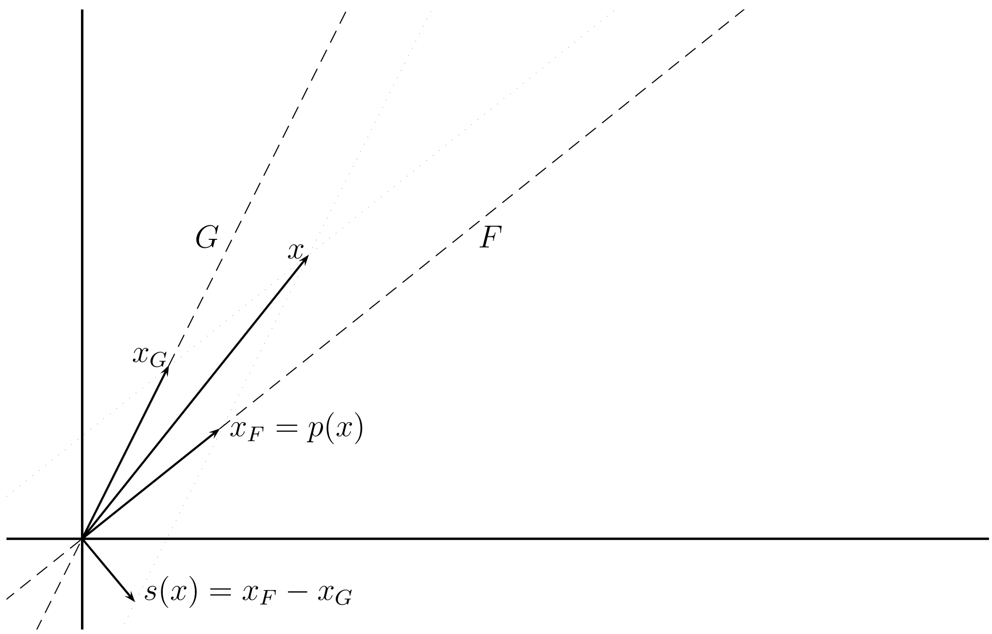
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout x élément de E, soit l'unique décomposition $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$, on appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application p de E dans E définie par

$$p(x) = x_F,$$

et on appelle symétrie par rapport F parallèlement à G l'application s de E dans E définie par

$$s(x) = x_F - x_G$$

En dimension 2, avec F et G deux droites vectorielles, cela donne la figure suivante. Ne pas hésiter à faire un dessin sur un feuille de brouillon ou au tableau, quand on cherche un exercice.



3.4.2 Propriétés

Proposition 10. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E, p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors on a*

(a) $p, s \in \mathrm{L}(E)$

(b) $p = \frac{s+\mathrm{Id}}{2}$

(c) $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ *et* $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 11 (Caractérisation d'un projecteur ou d'une symétrie)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application de E dans E, on a*

$$f \text{ est un projecteur} \iff f \in \mathrm{L}(E) \text{ et } f \circ f = f,$$
$$f \text{ est une symétrie} \iff f \in \mathrm{L}(E) \text{ et } f \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathrm{L}(E)$ définie par $f(x,y) = (5x - 2y, 12x - 5y)$.
   On calcule que $f(f(x,y)) = (x,y)$, on a donc l'application f est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.
   On cherche ses éléments caractéristiques, les points fixes $f(x,y) = (x,y)$ donne le système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & x \\ 12x - 5y & = & y \end{array}\right. \iff 2x - y = 0.$$
   les vecteurs qui sont envoyés sur leurs opposés $f(x,y) = (x,y)$ donne le système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & -x \\ 12x - 5y & = & -y \end{array}\right. \iff 3x - y = 0.$$
   On conclut f une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2x$ parallèlement à la droite d'équation $y = 3x$.
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'application φ définie de E dans E par
   $$\varphi(f) = (x \mapsto f(x) - f(2)).$$
   Elle est linéaire.
   On vérifie que
   $$\begin{array}{rcl} \varphi(\varphi(f)) & = & \varphi(x \mapsto f(x) - f(2)) \\ & = & (x \mapsto (f(x) - f(2)) - (f(2) - f(2))) \\ & = & (x \mapsto f(x) - f(2)) = \varphi(f). \end{array}$$
   L'application φ est donc un projecteur. On a
   $$\operatorname{Im} \varphi = \{f \quad ; \quad f \in E, f(2) = 0\}$$
   et
   $$\operatorname{Ker} \varphi \text{ ensemble des fonctions constantes sur } \mathbb{R}.$$

3. Soit E un espace vectoriel et p, q 2 projecteurs de E, montrons qu'il y a équivalence entre
   (i) $p+q$ est un projecteur.
   (ii) $p \circ q = q \circ p = 0$

   $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$
   On a

$$\begin{aligned}(p+q)^2 = (p+q)\circ(p+q) &= p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 \\ &= p + p\circ q + q\circ p + q \qquad \text{(car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs)} \\ &= p+q \qquad \text{(car } p\circ q = q\circ p = 0)\end{aligned}$$

   Par caractérisation des projecteurs, on a donc $p+q$ projecteur.

   $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$
   Comme $p+q$ est un projecteur, par caractérisation des projecteurs, on a $(p+q)^2 = p+q$, soit

$$p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q.$$

   Comme p et q sont des projecteurs, on a $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et on en déduit

$$p\circ q + q\circ p = 0.$$

   Il en résulte

$$p\circ q = -q\circ p.$$

   En composant par p, on en déduit

$$p^2\circ q = -p\circ q\circ p.$$

   et comme $p^2 = p$ et $p\circ q = -q\circ p$, on donc

$$p\circ q = -(-q\circ p)\circ p,$$

   soit, comme $p^2 = p$,

$$p\circ q = q\circ p.$$

   On a donc

$$p\circ q = q\circ p = -q\circ p.$$

   On conclut $q\circ p = p\circ q = 0$.

Proposition 12. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur, alors l'application linéaire $q = \mathrm{Id} - p$ est un projecteur, p et q sont appelés projecteurs associés et on a*

$$p\circ q = q\circ p = 0, \quad p+q = \mathrm{Id}, \quad \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im} q, \quad \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im} p.$$

Proposition 13. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $f_1 \in \mathrm{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathrm{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application f de $\mathrm{L}(E, F)$ tel que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.*

Preuve :

Pour l'existence, on construit f en utilisant les projecteurs associés p_{E_1} et p_{E_2} sur les 2 espaces supplémentaires E_1 et E_2 et en posant $f = f_1 \circ p_{E_1} + f_2 \circ p_{E_2}$.