

Droite réelle, études de fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & |x+2| \leq 3 & \text{(b)} \quad |x+2| > 3 & \text{(c)} \quad |2x+3| \geq |x+4| \\ \text{(d)} & 2|x| - |x+1| + |x+2| = 3 & \text{(e)} \quad x^2 + 1 \leq 2x^2 + 3x + 2. & \text{(f)} \quad |x| - |x^2 - 1| = 0 \end{array}$$

Exercice 2. Soient un fonction f définie sur \mathbb{R} et $a, b > 0$, on suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a) = f(x) + b.$$

Quelle propriété vérifie la courbe de f ?

Exercice 3. Soient un fonction f définie sur \mathbb{R} et A et B 2 points distincts du plan, on suppose que A et B sont des centres de symétries de la courbe de f .

Montrer que f peut se décomposer comme la somme d'une fonction périodique et d'une fonction affine.

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition et dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad f(x) = \ln(x^2 - 1), & \text{(ii)} \quad g(x) = \frac{x^a}{a^x} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^{+*} & \text{(iii)} \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \text{(iv)} \quad v(x) = \cos(x^{\sin(x)}) & \text{(v)} \quad w(x) = \sqrt[3]{x + \sin^4(x)} & \text{(vi)} \quad u(x) = \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{array}$$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1) \quad 3^{2x} - 34 \times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$$

$$2) \quad x^x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x > 0$$

$$3) \quad x^x = \frac{3\sqrt{6}}{4}, \quad x > 0$$

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R} le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R}_+^* le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$$

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1.$$

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{R}_+^* l'équation :

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{25}{4}.$$

Exercice 10. Résoudre le système d'équations d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12}, \quad \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12}$$

Exercice 11. En étudiant, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_a : x \rightarrow \arctan \frac{a+x}{1-ax}$, montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} \arctan \frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) & \text{si } ab = 1 \\ \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \pi \operatorname{sgn}(a) & \text{si } ab > 1. \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\arccos x = \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4}$.

2) $\arcsin(\tan x) = x$.

3) $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{\pi}{4}$.

4) $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 13. Tracer la courbe de la fonction g définie par $g(x) = \arcsin(\cos(2x-1))$.

Exercice 14.

1. Etudier et tracer la courbe de th .
2. Démontrer que c'est une bijection entre des ensembles à préciser, on notera argth sa réciproque.
3. Déterminer une expression analytique de argth .
4. Simplifier $\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Exercice 15. Soit $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(t_i + t_j) + \cos(t_i - t_j) \geq -n$$

Exercice 16. \star Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour les courbes d'équations $y = \operatorname{sh} x$ et $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.