Droite réelle, études de fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $2\,|x| - |x+1| + |x+2| = 3$ (b) $|x| - |x^2 - 1| = 0$.

Exercice 2. Soient un fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et $a, b > 0$, on suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a) = f(x) + b.$$

Quelle propriété vérifie la courbe de f ?

Exercice 3. Soient un fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et A et B 2 points distincts du plan, on suppose que A et B sont des centres de symétries de la courbe de f.

Montrer que f peut se décomposer comme la somme d'une fonction périodique et d'une fonction affine.

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition et dériver les fonctions définies par les expressions suivantes :

(i) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, (ii) $g(x) = \dfrac{x^a}{a^x}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^{+*}$ (iii) $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
(iv) $v(x) = \cos(x^{\sin(x)})$ (v) $w(x) = \sqrt[3]{x + \sin^4(x)}$ (vi) $u(x) = \left|\tan(\frac{x}{2})\right|$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $3^{2x} - 34 \times 15^{x-1} + 5^{2x} = 0$
2) $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x > 0$
3) $x^x = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$, $x > 0$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8^x & = & 10y \\ 2^x & = & 5y \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^y & = & y^x \\ x^3 & = & y^2 \end{array}\right.$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 1.$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{25}{4}.$$

Exercice 10. Résoudre le système d'équations d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12}, \quad \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12}$$

Exercice 11. En étudiant, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $f_a : x \to \arctan \dfrac{a+x}{1-ax}$, montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \begin{cases} \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} & \text{si} \quad ab < 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) & \text{si} \quad ab = 1 \\ \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \operatorname{sgn}(a) & \text{si} \quad ab > 1. \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\arccos x = \arcsin \dfrac{1}{3} + \arccos \dfrac{1}{4}$.

2) $\arcsin(\tan x) = x$.

3) $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \dfrac{\pi}{4}$.

4) $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 13. Tracer la courbe de la fonction g définie par $g(x) = \arcsin(\cos(2x-1))$.

Exercice 14.

1. Etudier et tracer la courbe de th.
2. Démontrer que c'est une bijection entre des ensembles à préciser, on notera argth sa réciproque.
3. Déterminer une expression analytique de argth.
4. Simplifier $\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Exercice 15. Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \cos(t_i + t_j) + \cos(t_i - t_j) \ge -n$$

Exercice 16. $\star$ Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour les courbes d'équations $y = \operatorname{sh} x$ et $y = 2x + a$ aient trois points communs distincts.