Dérivation et études de fonctions

Dans ce chapitre, la fonction f est définie sur un intervalle $I =]a, b[$ avec les nombres $a < b$ éventuellement infinis.

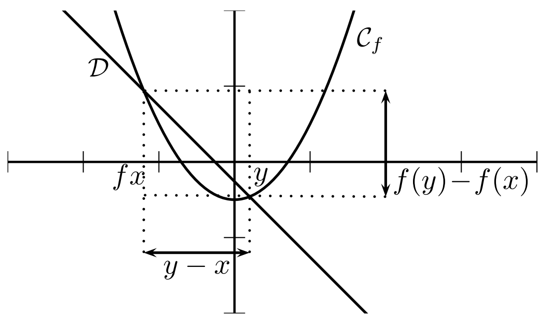
1 Dérivation

1.1 Définition

Soient x, y deux éléments de I distincts, on définit le taux d'accroissement de f entre x et y comme étant la quantité $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

C'est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

Exemple :



On dit que la fonction f est dérivable au point x_0, si le taux entre x_0 et x a une limite, quand x tend vers x_0 et on appelle dérivée en x_0 de f cette limite noté $f'(x_0)$. C'est-à-dire

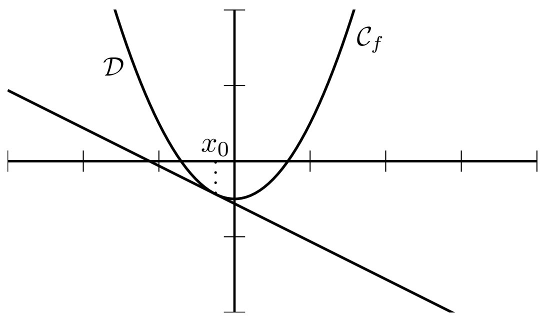
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On utilisera fréquemment le changement de variable $x = x_0 + h$ et on a alors

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si la fonction f est dérivable en x_0, on peut définir a tangente $\mathcal{D}$ à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. C'est la "meilleure" approximation de la courbe de f au voisinage du point $(x_0, f(x_0))$ par une droite.

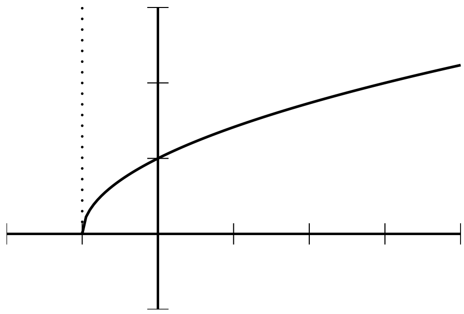
Exemple :



Si la limite en x_0 de $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie, la fonction f n'est pas dérivable en x_0, mais la courbe de f admet une tangente verticale en x_0.

Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = -1$.



Si $f$est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. On définit la fonction dérivée de f de I dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto f'(x)$.

1.2 Règles opératoires

Proposition 1 (Opérations algébriques)**.** *Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on*

1. *La fonction $f + \lambda g$ est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I, \quad (f + \lambda g)(x) = f'(x) + \lambda g'(x).$$

2. *La fonction $f \cdot g$ est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I, \quad (f \cdot g)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. *Si la fonction la fonction f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

4. *Si la fonction la fonction f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{g}{f}$ est dérivable sur I et on a*

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Proposition 2. *Soient f une fonction dérivable de I dans J et g une fonction dérivable de J dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et on a*

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Résumé :

En omettant les domaines de définition qu'il faut vérifier en cas d'application, pour f, g 2 fonctions et λ un nombre réel, cela peut se réduire à ce formulaire :

Fonction	Dérivée
$f + \lambda g$	$f' + \lambda g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{g}{f}$	$\dfrac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2}$
$g \circ f$	$g' \circ f \cdot f'$

Exercice : Soient f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)^n$.

1.3 Dérivée et variations

Proposition 3. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors on a*

$$f' \geq 0 (\textit{respectivement } f' \leq 0) \textit{ sur } I \Longrightarrow f \textit{ est croissante (respectivement décroissante) sur } I,$$

si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, cette monotonie est stricte.

Corollaire 1. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors on a*

$$f' = 0 (\textit{la fonction dérivée est la fonction identiquement nulle sur } I) \Longrightarrow f \textit{ est une fonction constante sur } I.$$

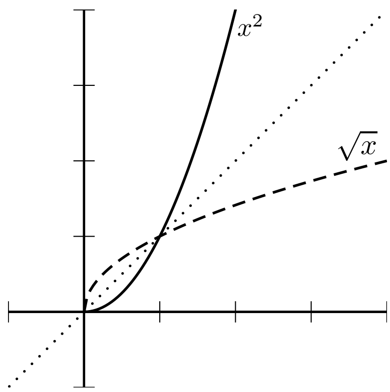
Proposition 4. *Soient une fonction f dérivable et bijective de I dans J et $y \in J$, alors f^{-1} est une bijection de J dans I dérivable en y, si et seulement si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque : Si la dérivée d'une fonction f bijective s'annule en un point x_0, la courbe de f possède une tangente horizontale en x_0, alors la courbe de f^{-1} possède un tangente verticale en $f(x_0)$ et la dérivée n'existe pas (pente infinie).

Exemple :

La fonction $f = x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ a une tangente verticale en 0.



2 Études de fonctions

2.1 Étude des variations et de la courbe de f

Dans un problème, l'étude d'une fonction peut être guidée par le sujet, mais aussi laissé à la totale liberté de l'étudiant (en particulier dans les exercices d'oraux, une fonction auxiliaire à étudier peut être à introduire par le candidat au cours de la résolution de la question)

On donne ici un plan d'étude exhaustive d'une fonction f avec pour objectif final le tracé de la courbe de la fonction. Dans la pratique, il peut arriver que seulement certaines informations nous intéressent (majoration, minoration, monotonie etc...), dans ce cas, on réduit l'étude aux points nécessaires.

En exemple, on traitera la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$.

Etape 1 : Le domaine de définition

Si on a seulement l'expression de la fonction, il faut déterminer l'ensemble de définition.

Ici, on a $D_f = \mathbb{R}$.

Etape 2 : Le domaine d'étude

On remarque les propriétés de périodicité ou parité pour réduire le domaine d'étude.

Ici, on a $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est impaire, on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Etape 3 : Etude des variations

On détermine les variations de la fonction sur l'intervalle déterminer en étape 2. Si l'utilisation des règles de composition des fonctions monotones permet de conclure, on peut s'en servir. En général, on dérive la fonction f et on étudie le signe de la fonction f'.

On remplit, ensuite, un tableau de variation.

Ici, on a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Le seul point d'annulation sur $\mathbb{R}^+$ est 1.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Etape 4 : Etude des limites et valeurs aux bornes.

On calcule ici $f(0) = 0$ et $f(1) = -2$, puis par factorisation par le terme dominant en $+\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = +\infty.$$

Etape 5 : Tracer la courbe

On trace le morceau de droite sur $\mathbb{R}^+$, puis on trace le reste par symétrie centrale.