Espaces préhilbertiens

Exercice 1.

1. Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \to & f(0)g(0)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \to & \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) \end{array}\right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2.

Soient E un espace préhilbertien réel et $\|\ .\ \|$ la norme associée à son produit scalaire. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. Montrer que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

A quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 3.

Soient $(f,g) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^2$ strictement positives.

1. Montrer que : $\displaystyle\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 g(t)\mathrm{d}t \times \int_0^1 \frac{g(t)}{f(t)^2}\mathrm{d}t$
2. En déduire : $\displaystyle\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^3\mathrm{d}t \times \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$

Exercice 4.

Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose : $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(\left({}^tA\right)B\right)$.

1. Montrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n\mathrm{Tr}({}^tAA)$.
3. Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale pour $\langle .,.\rangle$.
4. Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{Tr}(AB)^2 \leq \mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^2)$.

Exercice 5.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille $\big((1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0)\big)$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser la famille $\big((0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\big)$.
3. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$, même question pour la famille $\big(t \to t, t \to \sqrt{t}, t \to \sqrt[3]{t}\big)$.
4. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) \to \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$. Après justifier que c'est un produit scalaire, orthonormaliser la famille $(1,X,X^2,X^3)$.

Exercice 6.

Soient E un espace préhilbertien réel et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs unitaires de E tels que $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$ pour tout $x \in E$. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E. En particulier, E est euclidien.

Exercice 7.

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, soient
   $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y - z + t = 0\}$ et p la projection orthogonale sur F.
   Déterminer la matrice de p dans la base canonique puis calculer la distance de $(1,0,1,1)$ à F.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, soient
   $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y - z = 0 \ \text{ et } \ 2x - y = 0\}$ et s la symétrie orthogonale par rapport F.
   Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 8. $\star$

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors : $\forall x \in E, \ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. Réciproquement, on suppose que : $\forall x \in E, \ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
   (a) Soient $u \in \operatorname{Im} p$ et $v \in \operatorname{Ker} p$. En considérant le vecteur $u + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$, montrer que u et v sont orthogonaux.
   (b) En déduire que p est orthogonal.
3. Conclure.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien, montrer l'application φ définie de E dans $\mathrm{L}(E,\mathbb{R})$ par

$$\varphi(a) = (x \longmapsto \langle a, x\rangle)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 10. Calculer *(i)* $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t - c)^2 \mathrm{d}t$ *(ii)* pour $n \geq 2$, $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^{n} (k^2 - ak - b)^2$.

Exercice 11. $\star$

On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire : $(f,g) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \ ; \ f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

(*Indication : si $f \in F^\perp$, s'intéresser à $t \to tf(t)$*)

En déduire que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ est une inclusion stricte.

Exercice 12. $\star$

On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire : $(f,g) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

On souhaite déterminer $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})^\perp$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})^\perp$. On note F l'unique primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que $F(1) = 0$
2. Montrer que : $\forall \varphi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad \displaystyle\int_0^1 F(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. Conclure.

Exercice 13. $\star$

Soient E un espace préhilbertien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que
$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
2. Si E est un espace euclidien, montrer que l'inclusion précédente est une égalité.

Exercice 14. $\star$

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall (x,y) \in E, \ \ < f(x), y > = < x, f(y) > .$$

On dit alors que f est *autoadjoint*.

1. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f$.