Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Résoudre sur un intervalle "raisonnable" que l'on précisera les équations différentielles homogènes d'ordre 1 suivantes (x est la variable réelle, y est la fonction inconnue à valeurs réelles) :

1) $y' - (2x+1)y = 0$
2) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$
3) $y' - \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}y = 0$
4) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$
5) $(x^2+2x+5)y' + y = 0$
6) $(x^2-3x+2)y' + y = 0$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles d'ordre 1 suivantes :

1) $y' - y = e^{3x} + 2x$
2) $y' + xy = x$
3) $y' + y = 2e^{-x} + 4\sin x + 3\cos 3x$
4) $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
5) $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}$ (pour le calcul de la primitive intervenant dans la variation de la constante, on pourra poser le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$)

Exercice 3. Soit $k > 1$ fixé. Déterminer la solution y de l'équation différentielle : $y' + ky = e^x$ sur $[0, +\infty[$ telle que $y(0) = 0$.

Exercice 4. $\star$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1) $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{ch} x$
2) $y'' + 2y' + 2y = xe^x$
3) $y'' + y' + y = e^{-x} + e^{3x}$
4) $y'' + 9y = \cos x + \cos 3x$

Exercice 6. Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x + 2y \\ y' & = & x + 4y \end{array} \right.$$

Exercice 7. Trouver la solution y de l'équation différentielle : $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 6e^{4x} - 6e^x$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8. Montrer qu'il existe une infinité de solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation : $y'' + y = 0$ telles que $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$. Déterminer ces solutions.

Exercice 9. $\star$ *Équations différentielles d'Euler*

1) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas 0 et $k \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Montrer que l'équation différentielle : $x^2y'' + axy' + by = k$ se ramène, par le changement de variable $t = \ln|x|$, à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

2) Résoudre sur $]0, +\infty[$ les équations différentielles d'Euler suivantes :

$$\alpha)\ x^2y'' - 2y = x \quad \beta)\ x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2.$$

3) $\star\star$ Déterminer les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(\frac{1}{x})$.

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle : $(1+x^2)y'' + xy' - 4y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Un peu comme à l'exercice précédent on effectuera le changement de variable $x = \operatorname{sh} t$.

Exercice 11. $\star$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = xe^x.$$

Exercice 12. $\star$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x.$$

Exercice 13. $\star\star$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1.$$