Méthodes de résolution des équations différentielles linéaires

Dans la suite, I sera un intervalle de $\mathbb{R}$ et on notera $\mathbb{K}$ le corps de base de l'ensemble image (on pourra remplacer dans un énoncé donné par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère l'équation d'inconnue la fonction y

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

où a, b et c ont des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

1.1 Équation homogène

Proposition 1. *Soient a, b 2 fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sur I de l'équation*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

forment un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Explications :

(i) La fonction nulle $t \mapsto 0$ est solution de l'équation (1).

(ii) La somme de deux solutions y_1 et y_2 est solution. C'est-à-dire, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1), alors $t \mapsto y_1(t) + y_2(t)$ est aussi solution.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si y_1 est une solution de (1), alors λy_1 est aussi une solution de l'équation (1).

Proposition 2. *Soient a, b 2 fonctions continues sur I. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. On note $A(t)$ une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$ qui existe, car $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$ est une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque : Attention le fait que a ne s'annule pas est une hypothèse importante. Ici, il y a un seul paramètre libre λ (On verra plus loin dans le cours que le sous-espace vectoriel des solutions est de dimension 1.).

Exemple :

$$ty'(t) - 2y(t) = 0. \tag{2}$$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais la primitive nécessite de se placer sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0[$, la primitive de $-\frac{2}{t}$ est $-2\ln|t|$. Les solutions de l'équation (2) sur $]-\infty, 0[$ sont donc les fonctions $t \mapsto \lambda_1 e^{2\ln|t|}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ soit les fonctions $t \mapsto \lambda_1 t^2$. Sur $]0, +\infty[$, la primitive de $-\frac{2}{t}$ est

$-2\ln|t|$. Les solutions de l'équation (2) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions $t \mapsto \lambda_2 e^{2\ln|t|}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ soit les fonctions $t \mapsto \lambda_2 t^2$.

Les solutions sont prolongeables à droite et à gauche de 0 par 0. Les dérivées des fonctions solutions $t \mapsto 2\lambda_1 t$ et $t \mapsto 2\lambda_2 t$ sont aussi prolongeables à droite et à gauche en 0 par 0. Les solutions y sur $\mathbb{R}$ tout entier sont donc de la forme

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 t^2 & \text{pour } t \in \mathbb{R}^- \\ \lambda_2 t^2 & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. ,$$

avec λ_1 et λ_2 indépendants.

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 2, si la fonction y est solution de*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0,$$

il y a équivalence entre

(i) La fonction y s'annule en un point $t_0 \in I$.

(ii) La fonction y est la fonction nulle.

1.2 Équation avec second membre

Dans cette partie, on considère l'équation

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \tag{3}$$

avec a, b, c des fonctions continues sur I, la fonction a ne s'annulant pas sur I et on suppose que l'équation homogène associée

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

a été résolue et son ensemble de solutions est S.

Proposition 3. *Si y_1 est une solution de l'équation (3), alors l'ensemble des solutions de (3) est*

$$\{y_1 + y \quad ; \quad y \in S\} = \{y_1 + \lambda e^{-A(t)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K}\},$$

où A est définit comme au paragraphe précédent comme une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$.

Grâce à cette proposition, il suffit de trouver une solution particulière.

On utilise la proposition suivante pour découper le problème.

Proposition 4. *(Principe de superposition) Si y_1 est une solution sur I de l'équation*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c_1(t)$$

et y_2 est une solution sur I de l'équation

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c_2(t),$$

où c_1 et c_2 sont des fonctions continues sur I, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors $y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2$ est solution sur I de

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = \alpha c_1(t) + \beta c_2(t).$$

On a, principalement, deux méthodes :

1.2.1 Solution évidente

On trouve une solution évidente. On la cherche de la forme du second membre. Une méthode systématique de recherche d'une solution particulière pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants sera expliquée dans le paragraphe 1.4.

Exemple :

Soit l'équation définit sur $\mathbb{R}$ par

$$y'(t) + ty(t) = t.$$

L'équation homogène est

$$y'(t) + ty(t) = 0,$$

on calcule la primitive de t, soit $\frac{t^2}{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

La fonction $t \mapsto 1$ est solution évidente. L'ensemble des solutions de l'équation générale est donc

$$\left\{ t \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

1.2.2 Méthode de la variation de la constante

Soit y_0 une solution de l'équation homogène qui n'est pas la fonction nulle (obtenu le plus souvent par la méthode du paragraphe précédent). On cherche alors une solution de l'équation générale sous la forme

$$y(t) = \lambda(t) y_0(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} a(t)y'(t) + b(t)y'(t) &= a(t)\lambda'(t)y_0(t) + a(t)\lambda(t)y_0'(t) + b(t)\lambda(t)y_0(t) \\ &= \lambda(t)\underbrace{(a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t))}_{=0} + a(t)\lambda'(t)y_0(t) = a(t)\lambda'(t)y_0(t) = c(t) \end{aligned}$$

Comme a et y_0 ne s'annulent pas sur I (grâce au corollaire 1), il suffit de calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{c(t)}{a(t)y_0(t)}$ et on obtient une solution pour λ.

Exemple :

Soit l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(1 + t^2)y'(t) - 2ty(t) = 2(1 + t^2)\text{arctan}(t).$$

L'équation homogène est

$$(1 + t^2)y'(t) - 2ty(t) = 0,$$

comme $(1 + t^2)$ ne s'annule pas, on calcule la primitive de $-\frac{2t}{1+t^2}$, soit $-\ln(1 + t^2)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-(-\ln(1+t^2))} = \lambda(1 + t^2) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

On utilise alors la méthode de la variation de la constante, cela donne :

$$(1 + t^2)\lambda'(t)(1 + t^2) = 2(1 + t^2) \arctan(t),$$

soit

$$\lambda'(t) = \frac{2\arctan(t)}{1+t^2}.$$

Il en résulte qu'une possibilité pour λ est $\lambda(t) = (\arctan(t))^2$. (dérivée de la forme $2u'(t)u(t)$) L'ensemble des solutions de l'équation générale est donc

$$\{t \mapsto (\arctan(t))^2(1+t^2) + \lambda(1+t^2) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

1.3 Unicité de la solution au problème de Cauchy

On considère le problème

$$\begin{cases} a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec a, b, c fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I et t_0 un point de I. Ce problème admet une solution unique.

On résout l'équation générale $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ sous la forme $y_1 + \lambda y_2$ (y_1 solution particulière de l'équation avec second membre et y_2 solution non nulle de l'équation homogène) et on utilise la condition $y(t_0) = y_0$ pour déterminer λ.

1.4 Un cas particulier important : les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Pour $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et c une fonction continue sur I, on considère l'équation différentielle

$$ay'(t) + by(t) = c(t).$$

1.4.1 Équation homogène

On considère

$$ay'(t) + by(t) = 0.$$

En utilisant la proposition 2, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto e^{\alpha t} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{K}\right\},$$

où $\alpha = -\frac{b}{a}$ est racine de $aX + b = 0$ qui est appelée équation caractéristique de cette équation différentielle.

1.4.2 Équation non homogène

On peut utiliser la méthode de la variation de la constante, mais une méthode efficace est de décomposer le second membre en utilisant le principe de superposition et de se ramener à des équations différentielles auxiliaires de la forme

$$ay'(t) + by(t) = P(t)e^{\beta t},$$

où P est un polynôme.

On recherche alors une solution sous la forme $y(t) = Q(t)e^{\beta t}$, où Q est un polynôme de même degré que P si β n'est pas racine de l'équation caractéristique ou un polynôme de degré P augmenté de 1 sans coefficient constant si β est racine de l'équation caractéristique (c'est-à-dire si $\beta = -\frac{b}{a}$).

Exemples:

1. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y'(t) - 2y(t) = te^t \quad (E_1)$$

Pour l'équation homogène, on a directement :

$$\mathcal{S}_{E_{1,h}} = \left(t \mapsto \lambda e^{2t}; \lambda \in \mathbb{R}\right).$$

On cherche une solution particulière de l'équation générale sous la forme $y_0 : t \mapsto (at+b)e^t$. On a alors

$$y_0'(t) \quad = \quad ae^t + (at+b)e^t,$$

puis

$$y_0'(t) - 2y_0(t) = (-at + (-b+a))e^t = te^t.$$

Il est alors suffisant de prendre $a = b = -1$ et on a

$$\mathcal{S}_{E_1} = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} + (-t-1)e^t; \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y'(t) - 2y(t) = te^{2t} \quad (E_2)$$

comme 2 est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at^2 + bt)e^{2t}$. On a alors

$$y_0'(t) \quad = \quad (2at+b)e^{2t} + (2at^2 + 2bt)e^{2t},$$

puis

$$y_0'(t) - 2y_0(t) = (2at+b)e^{2t} = te^{2t}.$$

Il est alors suffisant de prendre $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$

$$\mathcal{S}_{E_2} = \left\{t \mapsto \left(\frac{t^2}{2} + \lambda\right) e^{2t}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y'(t) - 2y(t) = \cos(t) \quad (E_3)$$

On commence par résoudre l'équation

$$y'(t) - 2y(t) = e^{it} \quad (\tilde{E}_3)$$

Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on le cherche sous la forme $y_1(t) = Ke^{it}$ et on trouve $(i-2)K = 1$, soit $K = \frac{1}{i-2} = -\frac{1}{5}(i+2)$.
On peut dans un second temps trouver déterminer une solution y_2 de $y' - 2y = e^{-it}$ puis utiliser les formules d'Euler et le principe de superposition pour conclure en posant $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$ qui est alors solution de l'équation initiale. On peut aussi plus rapidement, comme l'équation n'a que des coefficients réels, ne pas passer par le calcul de y_2, calculer directement la partie réelle de y_1 et on trouve comme solution particulière : $y_0 : t \mapsto -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$ et on conclut

$$\mathcal{S}_{E_3} = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t; \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On considère l'équation d'inconnue la fonction y

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t),$$

où a, b et c sont des nombres réels (ou complexes) avec $a \neq 0$ et d une fonction définie sur un intervalle I.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

2.1 Équation homogène

Soit l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) \quad = \quad 0, \tag{4}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$. On considère son équation caractéristique $ax^2 + bx + c = 0$.

Proposition 5. *Les solutions de l'équation (4) sont définies sur $\mathbb{R}$ et de plus, on a :*

a) Si l'équation caractéristique possèdent deux racines distinctes α_1 et α_2, l'ensemble des solutions est

$$\left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\}.$$

b) Si l'équation caractéristique possèdent une racine double α, l'ensemble des solutions est

$$\left\{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{\alpha t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\}.$$

Exemples :

(i) Soit l'équation

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique est donc $x^2 - 4x + 5 = 0$, ses racines sont $2 + i$ et $2 - i$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{t \mapsto \lambda_1 e^{(2-i)t} + \lambda_2 e^{(2+i)t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\}.$$

(ii) Soit l'équation

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique est donc $x^2 - 2x + 1 = 0$, elle possède une racine double 1 . L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\}.$$

Souvent dans les problèmes, les seules solutions intéressantes sont celles à valeurs réelles. Si l'équation est de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) \quad = \quad 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$. La méthode précédente fait apparaÓtre des solutions à valeurs complexes, comme la dérivation est linéaire par rapport à une variable réelle, on a $\mathrm{Re}(f'(t)) = \mathrm{Re}(f)'(t)$ et $\mathrm{Im}\,(f'(t)) = \mathrm{Im}\,(f)'(t)$et . On peut donc prendre la partie réelle et la partie imaginaire des solutions.

Proposition 6. *Si a, b, c sont des nombres réels et $b^2 - 4ac < 0$, on note $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ appelé pulsation, $A = -\frac{b}{2a}$ (on parle d'amortissement si $A < 0$ et $-A$ est alors le coefficient d'amortissement) et l'ensemble des solutions à valeurs réelles de d'équation (4) sont*

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) e^{At} + \lambda_2 \sin(\omega t) e^{At} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

que l'on peut reformuler

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \beta \cos(\omega t + \varphi) e^{At} \quad ; \quad (\beta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\}.$$

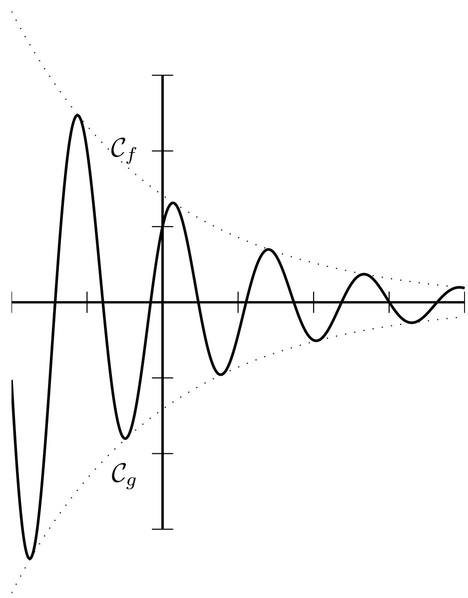
Exemple : Soit l'équation

$$y''(t) + y'(t) + 25y(t) = 0.$$

L'équation caractéristique est donc $x^2 + x + 25 = 0$, ses racines sont $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{11}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{11}$. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation est donc

$$\{t \mapsto \lambda_1 \cos\left(t\frac{3\sqrt{11}}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}t} + \lambda_2 \sin\left(t\frac{3\sqrt{11}}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

La courbe de la solution pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.



2.2 Équation avec second membre

Dans cette partie, on considère l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t), \tag{5}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, d une fonction continue sur I et on suppose que l'équation homogène associée

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

a été résolue et son ensemble de solutions est S.

Comme pour les équations linéaires du première ordre, on a

Proposition 7. *Si y_1 est une solution de l'équation (5) sur I, alors l'ensemble des solutions de (5) sur I est*

$$\{y_1 + y \quad ; \quad y \in S\}.$$

Il suffit donc de trouver une solution particulière de l'équation générale.

Proposition 8. *Si $d(t) = e^{\beta t}$, alors on peut chercher une solution particulière de (5) de la forme $Q(t)e^{\beta t}$:*

1. *avec Q un polynôme de degré 0, si β n'est pas racine de l'équation caractéristique (C'est-à-dire $a\beta^2 + b\beta + c \neq 0.$).*
2. *avec Q un polynôme de degré 1 sans terme constant, si β est racine simple de l'équation caractéristique.*
3. *avec Q un polynôme de degré 2 sans terme constant et sans terme de degré 1, si β est racine double de l'équation caractéristique.*

Remarque $\star$:

La méthode générale pour chercher une solution d'un second membre de la forme $d(t) = P(t)e^{\beta t}$ est de chercher une solution particulière de (5) de la forme $Q(t)e^{\beta t}$:

1. avec Q un polynôme de degré $\deg P$, si β n'est pas racine de l'équation caractéristique (C'est-à-dire $a\beta^2 + b\beta + c \neq 0.$).
2. avec Q un polynôme de degré $\deg P + 1$ sans terme constant, si β est racine simple de l'équation caractéristique.
3. avec Q un polynôme de degré $\deg P + 2$ sans terme constant et sans terme de degré 1, si β est racine double de l'équation caractéristique.

Exemples :

(i) Soit l'équation
$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 3e^t.$$
L'équation caractéristique est donc $x^2 - 4x + 5 = 0$, ses racines sont $2 + i$ et $2 - i$. 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et t est un polynôme de degré 1, on peut donc chercher une solution particulière de la forme : $y(t) = ae^t$. On a alors
$$\begin{array}{rcl} y(t) &=& ae^t \\ y'(t) &=& ae^t \\ y''(t) &=& ae^t \\ y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) &=& 2ae^t = 3e^t. \end{array}$$
Soit par identification, $a = \frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $t \mapsto \frac{3}{2}e^t$ et l'ensemble des solutions de l'équation générale est
$$\left\{ t \mapsto \frac{3}{2}e^t + \lambda_1 e^{(2-i)t} + \lambda_2 e^{(2+i)t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\}$$
ou si on se limite aux solutions réelles
$$\{t \mapsto \frac{3}{2}e^t + \lambda_1 \cos(t)e^{2t} + \lambda_1 \sin(t)e^{2t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Soit l'équation
$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 4e^t$$
L'équation caractéristique est donc $x^2 - 2x + 1 = 0$, elle possède une racine double 1. On peut donc chercher une solution particulière de la forme de degré 2 sans terme constant et sans terme de degré 1 : $y(t) = at^2e^t$. On a alors
$$\begin{array}{rcl} y(t) &=& at^2e^t \\ y'(t) &=& (at^2 + 2at)t^2)e^t \\ y''(t) &=& (at^2 + 4at + 2a)e^t \\ y''(t) - 2y'(t) + y(t) &=& 2ae^t = 4e^t. \end{array}$$

Soit par identification, $a = 2$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{t \mapsto (2t^2 + \lambda_1 t + \lambda_2)e^t \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\}.$$

(iii) Soit l'équation

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos(t)e^{-t}.$$

L'équation caractéristique est donc $x^2 - 3x + 2 = 0$, ses racines sont 1 et 2.
Cherchons une solution de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{it}e^{-t} = e^{(i-1)t}.$$

Comme les coefficients sont réels, en passant à la partie réelle, on pourra trouver une solution pour l'équation de départ. $-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On peut donc chercher une solution particulière de la forme : $y(t) = ae^{(-1+i)t}$.

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & ae^{(-1+i)t} \\ y'(t) & = & a(-1+i)e^{(-1+i)t} \\ y''(t) & = & a(-1+i)^2e^{(-1+i)t} = -2aie^{(-1+i)t} \\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) & = & a(-2i - 3(-1+i) + 2)e^{(-1+i)t} = a(5-5i)e^{(-1+i)t} = e^{(-1+i)t}. \end{array}$$

Par identification, il en résulte que $a = \frac{1}{5-5i} = \frac{1+i}{10}$.
La fonction $t \mapsto \frac{1+i}{10}e^{(-1+i)t}$ est donc solution de $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{it}e^{-t} = e^{(i-1)t}$.
En passant à la partie réelle, on obtient $t \mapsto \frac{1}{10}\cos(t)e^{-t} - \frac{1}{10}\sin(t)e^{-t}$ est solution de l'équation de départ.
Les solutions de l'équation sont

$$\{t \mapsto \frac{1}{10}\cos(t)e^{-t} - \frac{1}{10}\sin(t)e^{-t} + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}.$$

On généralise naturellement le principe de superposition :

Proposition 9. *(Principe de superposition) Si y_1 est une solution sur I de l'équation*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t)$$

et y_2 est une solution sur I de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_2(t),$$

où d_1 et d_2 sont des fonctions continues sur I, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors $y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2$ est solution sur I de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \alpha d_1(t) + \beta d_2(t).$$

Exemple :

Soit l'équation

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2 + \cos(t)e^{-t}.$$

On peut chercher une solution de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2.$$

On a directement $y \mapsto 1$ solution évidente. (Si on ne la trouve pas, on peut mettre 2 sous la forme $2e^{0t}$ et chercher sous la forme adéquate).

On a déterminé précédemment une solution particulière de

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \cos(t)e^{-t}.$$

On superpose les solutions et on trouve l'ensemble des solutions de l'équation de départ :

$$\{t \mapsto 1 + \frac{1}{10}\cos(t)e^{-t} - \frac{1}{10}\sin(t)e^{-t} + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}.$$

2.3 Problème de Cauchy

Proposition 10. *Soient* a, b, c *3 nombres réels (ou complexes) avec* $a \neq 0$, d *une fonction continue sur un intervalle* I, t_0 *un élément de* I *et* α, β *deux nombres réels (ou complexes), alors le système d'équations :*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta. \end{cases}$$

admet une unique solution y *définie sur* I.

ANNEXE :

Preuve des solutions des équations différentielles homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Proposition 5. *Soit l'équation différentielle :*

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E)$$

on note α_1, α_2 les 2 racines de l'équation caractéristique $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$.

L'ensemble de solution de (E) est alors

- *si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (cas de deux racine simple), $\mathcal{S}_E = \{x \mapsto \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$*
- *si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (cas d'une racine double), $\mathcal{S}_E = \{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{\alpha x} \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$*

Preuve : On définit deux applications φ_1 et φ_2 ayant comme ensemble des définitions les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dérivables à tout ordre et à valeurs dans $\mathbb{C}$) par

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ & y & \mapsto & y' - \alpha_1 y \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \varphi_2 : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ & y & \mapsto & y' - \alpha_2 y \end{array}.$$

On compose les 2, on obtient alors par linéarité de la dérivation et en utilisant les relations coefficients-racines

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(y) = y'' - (\alpha_1 + \alpha_2) y' + \alpha_1 \alpha_2 y = y'' + ay' + by.$$

Résoudre (E) revient à résoudre

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(y) = (x \mapsto 0)\,,$$

soit

$$\varphi_1(f) = (x \mapsto 0)\,, \qquad \text{où } f = \varphi_2(y).$$

On résout l'équation en f, soit $f' - \alpha_1 f = (x \mapsto 0)$, on a alors $f = (x \mapsto Ae^{\alpha_1 x})$ avec $A \in \mathbb{C}$. On résout alors

$$\varphi_2(y) = y' - \alpha_2 y = Ae^{\alpha_1 x}.$$

Les solutions de l'équations homogène $y' - \alpha_2 y = 0$ sont $y = (x \mapsto \lambda_2 e^{\alpha_2 x})$. Pour la solution particulière, utilisons la variation de la constante, on pose donc $y(x) = k(x)e^{\alpha_2 x}$ et en dérivant, on obtient

$$k'(x)e^{\alpha_2 x} + k(x)\alpha_2 e^{\alpha_2 x} - \alpha_2 k(x) e^{\alpha_2 x} = k'(x)e^{\alpha_2 x} = Ae^{\alpha_1 x}.$$

On en déduit $k'(x) = Ae^{(\alpha_1 - \alpha_2)x}$.

On distingue deux cas :

1. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on peut prendre $k(x) = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)x}$ et alors la solution complète est
$$y(x) = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} e^{\alpha_2 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x},$$
où $\lambda_1 = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2}$. On a bien le résultat voulu.
2. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, on peut prendre $k(x) = Ax$ et alors la solution complète est
$$y(x) = xAe^{(\alpha_1 - \alpha_2)x} e^{\alpha_2 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{\alpha_1 x},$$
où $\lambda_1 = A$. On a bien le résultat voulu.

Remarques:

1. Cette méthode de factorisation de φ en $\varphi_1 \circ \varphi_2$, ici parachutée, découle d'un résultat d'algèbre linéaire que l'on verra plus tard dans l'année.
2. Sans difficulté, la démarche se généralise aux équations différentielles homogènes à coefficients constants d'ordre quelconque, si on admet que, sur $\mathbb{C}$, un polynôme se factorise complètement.