Ensembles finis et dénombrements

Exercice 1.

Soit G un groupe. Un élément x du groupe G est d'ordre fini, si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = e_G$, on appelle alors l'ordre de x le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété.

1. Si G est fini, montrer que tout élément de G est d'ordre fini inférieur à card$G$.
2. Soit x un élément de G groupe. Montrer que $H_x = \left\{x^k \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de G et que H_x est isomorphe à $\mathbb{U}_n$ si x est d'ordre n et à $\mathbb{Z}$ si x n'est pas d'ordre fini.
3. Soit x un élément de G et $y \in G \setminus H_x$. Montrer que $H_x \cap yH_x = \emptyset$, où $yH_x = \{yt\,;\, t \in H_x\}$.
4. On suppose maintenant que card$G = 4$.
   (a) Montrer que G ne contient pas d'élément d'ordre 3.
   (b) On suppose que G contient un élément d'ordre 4. Montrer que G est isomorphe $\mathbb{U}_4$.
   (c) On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2. Montrer qu'il existe $a, b \in G$ tel que
   $$G = \{e, a, b, ba\}$$
   On déterminera la table de multiplication de G puis on montrera que G est isomorphe à $\mathbb{U}_2^2$ (muni de la loi produit composante à composante.)
5. Montrer que si le cardinal de G est un nombre premier p alors G est isomorphe à $\mathbb{U}_p$.

Exercice 2.

Calculez les sommes suivantes :

$$1)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \quad (n>0) \qquad 2)\ \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \quad (n>0)$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k} \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k+1}$$

$$4)\ \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p-k}\binom{n}{p+k} \quad (n \geq 2p > 0)$$

Exercice 3.

On lance quatre fois un dé. On appelle « **tirage** » la suite de ces 4 lancers.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages avec exactement deux numéros différents ?

Exercice 4. On tire 10 fléchettes sur une cible carrée de côté 1 mètre, montrer que 2 fléchettes au moins sont distantes de moins de $\frac{\sqrt{2}}{3}$ mètre.

Exercice 5.

Combien de carrés dans un quadrillage de n cases sur n cases.

Exercice 6. $\star$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une existe une infinité de couple (p, q) tel que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2},$$

(On pourra considérer la suite (u_n) définie par $u_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$.)

Exercice 7.

Combien y-a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Exercice 8.

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Calculer le cardinal de $F = \left\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2\right\}$.
2. Calculer le cardinal de $G = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)\,;\, A \subset B\}$.
3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer le cardinal de $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)\,;\, \operatorname{card}(A \cap B) = k\}$.
4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $p \in \mathbb{N}^*$, calculer le cardinal de $H_p \left\{(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathcal{P}(E)^p\,;\, \operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) = k\right\}$.

Exercice 9. $\star$

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

1. Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
2. On suppose $p \leqslant n$ et on considère a un élément de E.
   On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E\setminus\{a\}$ sur F, établir $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.
3. En déduire que $S_n^p = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

Vitesse supérieure

Exercice 10. $\star\star$ **Formule du crible**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in P_k^n} \operatorname{card}\Big(\bigcap_{i \in I} E_i\Big),$$

où P_k^n est l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 11. $\star\star$ Nombre de dérangements de $[1, n]$

Soit σ une permutation de $[1, n]$, σ est un dérangement de $[1, n]$, si elle ne possède aucun point fixe.

On note S_n l'ensemble des permutations de $[1, n]$.

On note D_n l'ensemble des dérangements de $[1, n]$.

On note $E_{i,n}$ l'ensemble des permutations de $[1, n]$ possédant i comme point fixe.

1. Déterminer le cardinal de $E_{i,n}$.
2. Soit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, déterminer le cardinale de $E_{i_1,n} \cap E_{i_2,n} \cdots \cap E_{i_k,n}$.
3. Montrer $D_n = S_n \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_{i,n}$.
4. En utilisant la formule du crible, montrer que
$$\operatorname{card} D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!(-1)^k.$$
5. Déterminer la proportion limite de dérangement parmi les permutations, c'est-à-dire
$$\lim_n \frac{\operatorname{card} D_n}{\operatorname{card} S_n}.$$
(On l'exprimera sous la forme d'une limite de suite et on admettra que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \lim_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.)