Ensembles et applications

1 Ensembles

1.1 Appartenance, inclusion

Un ensemble est intuitivement une collection d'objets. On a alors deux notions importantes :

- L'appartenance :
  On dit qu'un élément x appartient à l'ensemble A, si c'est un élément de la « **collection** » A. On le note $x \in A$. La non-appartenance se note $x \notin A$.
- L'inclusion, on dit l'ensemble B est inclus dans A. Si tout élément appartenant à B appartient aussi à A. On note cela $B \subset A$. La non-inclusion se note $B \not\subset A$.

Exemples :

1. Le nombre -1 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, mais appartient à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
$$-1 \notin \mathbb{N} \text{ et } -1 \in \mathbb{Z}$$
2. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$
3. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ n'est pas inclus dans l'ensemble des nombres réels.
$$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$$

On note $\emptyset$ l'ensemble qui ne contient aucun élément appelé ensemble vide.

On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. C'est-à-dire $\mathcal{P}(A) = \{B\,;\, B \subset A\}$.

Exemple :

Si $A = \{1, 2\}$, on a $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Méthodologie : Il est fréquent pour démontrer l'égalité de deux ensembles A et B de raisonner par doubles inclusions en montrant $A \subset B$ puis $B \subset A$.

1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 Opérations usuelles

Soient A et B deux parties de E, on définit les ensembles :

- Intersection de A et B notée $A \cap B$ par
$$A \cap B = \{x\,;\, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
- Union de A et B notée $A \cup B$ par
$$A \cup B = \{x\,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'ensemble A privé de B noté $A \setminus B$ par

$$A \setminus B = \{x\,;\, x \in A \text{ et } x \notin B\}\,.$$

- Le complémentaire de A dans E noté $\mathbf{C}_E^A$ par

$$\mathbf{C}_E^A = \{x\,;\, x \in E \text{ et } x \notin A\}\,.$$

Si $P(x)$ est une assertion définissant A (c'est-à-dire l'énoncé $P(x_0)$ est vérifié si et seulement x_0 est élément de A) et $Q(x)$ une assertion définissant B, on a

$$\begin{array}{rcll}
x \in A \cap B & \Longleftrightarrow & P(x) \wedge Q(x) & (\wedge \text{ est le "et" logique ou le AND en informatique}) \\
x \in A \cup B & \Longleftrightarrow & P(x) \vee Q(x) & (\vee \text{ est le "ou" logique ou le OR en informatique}) \\
x \in A \setminus B & \Longleftrightarrow & P(x) \wedge \neg Q(x) & (\neg \text{ est la négation logique ou le NOT en informatique})
\end{array}$$

Définition 1. *Soient E un ensemble et $A_1, \cdots, A_n$ des parties de E toute non vide, on dit que $(A_1, \cdots, A_n)$ est une partition de E, si*

(i) $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

(ii) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$.

1.2.2 Propriétés opératoires

Formulaire non exhaustif, pour A, B, C 3 parties d'un ensemble E, on a

$$\begin{array}{c|c}
A \cup A = A & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & \mathbf{C}_E^{A \cap B} = \mathbf{C}_E^A \cup \mathbf{C}_E^B \\
A \cap B = B \cap A & \mathbf{C}_E^{A \cup B} = \mathbf{C}_E^A \cap \mathbf{C}_E^B \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) &
\end{array}$$

Remarque :

Pour ce genre de résultat, il est conseillé de faire des dessins au brouillon (**« dessiner des patates »**) avant de formaliser proprement.

1.2.3 Produit cartésien

Soient A, B 2 ensembles, on définit la produit cartésien de A et B noté $A \times B$ par

$$A \times B = \{(a, b)\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}\,.$$

C'est l'ensemble des couples formés d'un élément de A et d'un élément de B.

Pour n entier positif non nul, on généralise pour $A_1, \cdots, A_n$ n ensembles par

$$A_1 \times A_2 \cdots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,;\, \forall i \in [1, n],\ a_i \in A_i\}\,.$$

On abrège $A^n = \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n \text{ fois}}$ et par convention $A^0 = \emptyset$.

1.3 Relations sur un ensemble

Soit Γ une partie de E^2, on lui associe une relation $\mathcal{R}_\Gamma$ tel que x est en relation avec y (noté $x\mathcal{R}_\Gamma y$), si et seulement si $(x,y) \in \Gamma$. Une relation $\mathcal{R}_\Gamma$ sur un ensemble E est

— *réflexive*, si $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}_\Gamma x.$

— *symétrique*, si $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}_\Gamma y \implies y\mathcal{R}_\Gamma x.$

— *antisymétrique*, si $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}_\Gamma y \text{ et } y\mathcal{R}_\Gamma x \implies x = y.$

— *transitive*, si $\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathcal{R}_\Gamma y \text{ et } y\mathcal{R}_\Gamma z) \implies x\mathcal{R}_\Gamma z.$

Définition 2. *Une relation est une relation d'équivalence, si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemples :

(i) L'égalité sur un ensemble E quelconque est une relation d'équivalence.

(ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la congruence modulo p sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.
« Les entiers n, m sont en relation si et seulement si $n - m$ est divisible par p. »

Définition 3. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E et x un élément de E, on appelle classe d'équivalence de x notée $\mathrm{cl}_\mathcal{R}(x)$ ou $\bar{x}^\mathcal{R}$, la partie de E définie par*

$$\mathrm{cl}_\mathcal{R}(x) = \{y\,;\, y \in E \text{ et } x\mathcal{R}y\}\,.$$

Proposition 1. *L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition d'un ensemble.*

Explication : Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble et θ une famille de représentants de chaque classe d'équivalence, c'est-à-dire pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in \theta$ tel que $x\mathcal{R}y$, alors

$$E = \bigcup_{x\in\theta} \mathrm{cl}_\mathcal{R}(x)$$

et pour tout $x_1, x_2 \in \theta$, $x_1 \neq x_1$ implique $\mathrm{cl}_\mathcal{R}(x_1) \cap \mathrm{cl}_\mathcal{R}(x_2) = \emptyset$.

Exemple :

L'argument d'un nombre complexe est une classe d'équivalence.

Définition 4. *Une relation est une relation d'ordre, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemples :

(i) L'inégalité large $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.

(ii) L'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.

Un relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est totale, si pour tout couple d'éléments (x, y) de E, on a une relation dans une sens ou dans l'autre. C'est-à-dire $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Si une relation d'ordre n'est pas totale, elle est partielle.

L'inégalité large sur $\mathbb{R}$ est totale, on peut toujours comparer 2 nombres réels. L'inclusion est en général un ordre partiel. Si $E = \{1, 2\}$, on a $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{P}(E)$, mais on a $\{1\} \not\subset \{2\}$, $\{2\} \not\subset \{1\}$.

2 Applications

2.1 Définitions

Une application (ou fonction) est un triplet $u = (E, F, G)$ où G est un partie de $E \times F$ tel que pour tout élément x de E, il existe une unique élément y de F tel que $(x, y) \in G$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \exists! y, \quad (x, y) \in G.$$

On note $u(x)$ l'élément y. On définit ainsi l'application de E vers F.

On la note $u : E \to F$ ou $E \overset{u}{\to} F$ ou encore $\begin{array}{cccc} u : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & u(x) \end{array}$.

Terminologie et reformulation :

- L'ensemble E est appelé *ensemble de départ* ou *ensemble de définition.*
- L'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée.*
- Soit $(x, y) \in G$, on a donc $y = u(x)$. L'élément y est appelé *image* de x par u et x est un *antécédent* de y par u.
- L'ensemble G appelé graphe de u
$$G = \{(x, u(x))\,;\, x \in E\}\,.$$
- On appelle ensemble image noté $u(E)$
$$u(E) = \{u(x)\,;\, x \in E\}\,.$$

Il y a égalité de 2 applications f et g, si et seulement seulement si f et g ont même ensemble de définition, même ensemble d'arrivée et même graphe.

L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

On parle de famille d'éléments d'un ensemble E indexé par un ensemble I (appelé index) noté $(x_i)_{i\in I}$. L'objet est totalement équivalent à une fonction de I dans E. L'exemple que vous connaissez déjà est les suites de nombres réelles noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) (Dans ce cas, l'index est sous-entendu comme étant $\mathbb{N}$).

Définition 5. *Soit E une ensemble et A une partie E, on définit la fonction indicatrice de A comme l'application de E dans $\{0, 1\}$ noté définie par*

$$\begin{array}{cccc} u : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{array}\right. \end{array}$$

2.2 Composition, restriction et prolongement

(i) Soient f une application de E dans E et A une partie de E, on dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$.

(ii) Soient f une application de E vers F, g une application de F vers G et h une application de G vers H. On définit la composée de g et f noté $f \circ g$ par
$$\begin{array}{cccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$
La composition de fonctions est une loi associative (en général non commutative), car on a
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(iii) Soient A une partie de E et f une application de E dans F, la restriction de f à A notée $f_{|A}$ est application de A dans F définit définit par
$$\begin{array}{cccc} f_{|A} : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

(iv) Soient A une partie de E, f une application de E dans F et g une application de A dans F, f est un prolongement de g à E si la restriction de f à A est égale à g, c'est-à-dire
$$\forall x \in A, \quad f(x) = g(x).$$

(v) Soit B une partie de F vérifiant $f(E) \subset B$, on appelle corestriction de f à B notée $f^{|B}$ l'application de E dans B définie par

$$f^{|B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Remarques :

1. La restriction d'un application est toujours unique. Il n'y a pas en général unicité du prolongement. Les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $f_1 : z \mapsto z^2$ et $f_2 : z \mapsto |z|^2$ sont 2 prolongements à $\mathbb{C}$ distincts de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
2. Si f est une application de E dans E et G est une partie de E stable par f, on allégera le plus souvent la notation $f_{|G}^{|G}$ par $f_{|G}$.

2.3 Image directe, image réciproque

2.3.1 Définitions

Soient A une partie d'un ensemble E, B une partie d'un ensemble F et f une application de E dans F. On appelle :

— *image directe* de A par f noté $f(A)$, la partie de F :

$$f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\}.$$

— *image réciproque* de B par f noté $f^{-1}(B)$, la partie de E (éventuellement vide) :

$$f^{-1}(B) = \{x\,;\, x \in E \text{ et } f(x) \in B\}.$$

Exemple :

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, on a

$$f([-5, 10]) = [0, 100], \quad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-1}([-1, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

2.3.2 Propriétés

Soient A une partie de l'ensemble E et B une partie de l'ensemble F, on a

$$f^{-1}(f(A)) \supset A \qquad \text{et} \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Remarque : En général, on n'a pas d'égalité.

3 Injections, surjections, bijections

3.1 Définitions

Soit f une application de E dans F, on dit que f est :

- une application *injective* ou une *injection*, si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans E.
- une application *surjective* ou une *surjection*, si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans E.
- une application *bijective* ou une *bijection*, si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a exactement un antécédent dans E.

Remarques et reformulations :

1. Une application est bijective, si et seulement si elle est injective et surjective.
2. Pour une application f de E dans F, en utilisant les quantificateurs, on peut reformuler (toujours aussi peu lisible...) :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ injective} & \iff & \forall x, x' \in E, \quad \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big) \\ f \text{ surjective} & \iff & \forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y \\ f \text{ bijective} & \iff & \forall y \in F, \exists! x \in E, \quad f(x) = y \end{array}$$

3.2 Propriétés

Proposition 2. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G, on a alors*

$$\begin{array}{ccccc} (i) & f \text{ et } g \text{ injectives} & \Longrightarrow & g \circ f \text{ injective} \\ (ii) & f \text{ et } g \text{ surjectives} & \Longrightarrow & g \circ f \text{ surjective} \\ (iii) & f \text{ et } g \text{ bijectives} & \Longrightarrow & g \circ f \text{ bijective} \end{array}$$

On a seulement une réciproque partielle :

Proposition 3. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G, on a alors*

$$\begin{array}{cccc} (i) & g \circ f \text{ injective} & \Longrightarrow & f \text{ injective} \\ (ii) & g \circ f \text{ surjective} & \Longrightarrow & g \text{ surjective} \end{array}$$

3.3 Application réciproque

3.3.1 Définition

Soit une application f de E dans F bijective, on définit la réciproque de f notée f^{-1} comme l'application de F dans E définie pour $y \in F$ par $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f.

3.3.2 Propriétés

Proposition 4. *Soit f une application de E dans F bijective alors*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E,$$

où Id_M est l'application identité d'un ensemble M dans lui-même.

Remarque : *Attention, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ n'a de sens que si $E = F$.*

Réciproquement, on a

Proposition 5. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans E, tel que*

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et } g \circ f = \mathrm{Id}_E,$$

alors f et g sont bijections et on a $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

Remarque : Attention, $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ n'est pas suffisant.

Corollaire 1. *Si f est une application bijective de E dans F, alors f^{-1} est une application bijective de F dans E et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Définition 6. *Une application f bijective de E dans E est appelée permutation de E.*

Définition 7. *Une application* f *de* E *dans* E *est une involution, si elle vérifie* $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 6. *Soit* f *une involution de* E*, alors* f *est bijective et* $f^{-1} = f$*. (Une involution de* E *est une permutation de* E*.)*

Proposition 7. *Soient* f *une application bijective de* E *dans* F *et* g *une application bijective de* F *dans* G*, alors* $g \circ f$ *est une application bijective de* E *dans* G *et on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Proposition 8. *Soient* E *un ensemble et l'ensemble des permutations de* E *(noté* $S(E)$ *ou* $\mathfrak{S}(E)$*) muni de la loi* $\circ$ *est un groupe.*