Ensembles et applications

Exercice 1.

Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2+4x+1 \end{array}\right.$

1. Déterminer les images directes et réciproques suivantes : $f([-3,0])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0,1[)$.
2. Montrer que la restriction de f à $]-\infty,-2]$ réalise une bijection sur son image (qu'on précisera) et déterminer la réciproque associée.

Exercice 2.

Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin\dfrac{\pi}{x} \end{array}\right.$ Déterminer $f(]0,1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à un couple (x,y) associe $(x, xy-y^3)$. f est-elle surjective ? est-elle injective ?

Exercice 4.

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. On pose $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \geq |b|\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) \subset A$.
3. On considère l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$$

   Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5.

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}$ avec $ad-bc \neq 0$, on définit l'application f de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f.
2. Montrer que la corestriction de f à son image est une bijection et on déterminera l'expression de sa réciproque.

Exercice 6.

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$$

1. Montrer que

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow A \cup B = E.$$

2. Montrer que
$$f \text{ surjective} \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Exercice 7.

Soient A, B, C 3 ensembles.

Montrer qu'il existe une bijection "naturelle" φ entre $\mathcal{F}(A \times B, C)$ et $\mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C))$.

On explicitera φ et φ^{-1}.

Exercice 8.

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

1. si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 9.

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 10.

Soient E, F des ensembles non vides et $f \in \mathcal{F}(E, F)$

1. Montrer que f est injective si et seulement pour toutes applications g et h de G dans E, on a
$$f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h.$$

   Montrer que f est surjective si et seulement pour toutes applications g et h de F dans G, on a
$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h.$$

Exercice 11. *Une caractérisation des injections*

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F.

1) Soient A et B deux parties de E.

1.a) Montrer que si f est injective alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1.b) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir à la fois l'égalité précédente et f non injective.

2) Démontrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) $f : E \to F$ est une injection.
(ii) Pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12. *Une caractérisation des surjections*

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. Démontrer l'équivalence entre les deux assertions :
(i) $f : E \to F$ est une surjection.
(ii) Pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 13.

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique ? réflexive ? transitive ?

Exercice 14.

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x = -y$
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff \exists p, q \in \mathbb{N}^*, \quad y = px^q.$

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

Si c'est une relation d'ordre, préciser si l'ordre est total.

Exercice 15. Une relation binaire transitive et symétrique est-elle nécessairement réflexive ?

Exercice 16.

Pour tout ensemble E, montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E). On pourra raisonner par l'absurde et chercher une contradiction en introduisant l'ensemble $A = \{a \in E \ ; \ a \notin f(a)\}$.

Exercice 17.

1. La relation binaire $\mathcal{R}_1$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall((p,q),(p',q')) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, \ \ (p,q)\mathcal{R}_1(p',q') \iff \Big(p \leq p' \ \text{ et } q \leq q'\Big)$$

   est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'ordre totale ?
2. La relation binaire $\mathcal{R}_2$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall((p,q),(p',q')) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, \ \ (p,q)\mathcal{R}_2(p',q') \iff \Big(p < p' \ \text{ ou } (p = p' \ \text{ et } q \leq q')\Big)$$

   est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'ordre totale ?
3. Selon quelle relation d'ordre sont classés les pays quant au nombre de médailles remportées aux jeux olympiques ?
4. Comment sont ordonnés les mots dans un dictionnaire ?

Exercice 18. Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$:

$$\begin{array}{rcl} f \sim g & \iff & \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^n, \\ f \approx g & \iff & \exists\, m, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^m, \\ f \equiv g & \iff & f(E) = g(E). \end{array}$$

1. Montrer que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f \in F$, on note $f^\sim$, $f^\approx$, $f^\equiv$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$.
   (a) Comparer $f^\sim$, $f^\approx$.
   (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\approx$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim$.
   (c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g \in f^\approx$ injective ? surjective ?
   (d) Même question avec $f^\equiv$.

Exercice 19.

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit la *différence symétrique de A et B*, notée $A\Delta B$, par :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2) Pour toute partie A de E on appelle *fonction caractéristique* ou *indicatrice* de A et on note χ_A (ou $\mathbb{1}_A$) l'application de E dans $\{0,1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \in A^c$. Montrer qu'on a les formules suivantes, pour toutes A et B parties de E :

$$\begin{align}
A = B &\iff \chi_A = \chi_B \tag{1}\\
\chi_A^2 &= \chi_A \tag{2}\\
\chi_{A^c} &= 1 - \chi_A \tag{3}\\
\chi_{A\cap B} &= \chi_A\ \chi_B \tag{4}\\
\chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_A\ \chi_B \tag{5}\\
\chi_{A\Delta B} &= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\ \chi_B \tag{6}
\end{align}$$

3) Montrer que pour toutes parties A, B, C de E, on a $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Exercice 20.

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Deux parties B et C de E sont en relation, noté $B\mathcal{R}C$, si $B\Delta C \subset A$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la classe de B est $\big\{(B \cap \bar{A}) \cup K; K \in \mathcal{P}(A)\big\}$.