Devoir surveillé 3

Exercice 1.

1. **Pour I :**
Première méthode :
On linéarise en utilisant la formule d'Euler :

$$\sin^5(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}(e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e{-}it + 5e^{-3it} - e^{-5it} = \frac{1}{16}\left(\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)\right)$$

D'où, simplification à faire en utilisant le cercle trigonométrique,

$$I = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos(5t)}{5} + \frac{5\cos(3t)}{3} - 10\cos(t)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{203}{240}.$$

Deuxième méthode :

$$\sin^5(t) = \sin(t)\left(1-\cos^2(t)\right)^2 = \sin(t) - 2\sin(t)\cos^2(t) + \sin(t)\cos^4(t).$$

On reconnait des formes $u'u^\alpha$ et on a alors

$$I = \left[-\cos(t) + \frac{2}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{5}\cos^5(t)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}) + \frac{1}{5}(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5})\right) = \frac{203}{240}.$$

$$\boxed{I = \tfrac{203}{240}.}$$

2. **Pour J :**
On reconnait une forme $\frac{u'}{u}$ et on a

$$J = [\frac{1}{2}\ln(\ln|t|)]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right).$$

$$\boxed{J = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right).}$$

3. **Pour K :**
En passant en complexe, on a $K = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^{2it}e^t\mathrm{d}t\right)$. Or on a

$$\int_0^\pi e^{2it}e^t\mathrm{d}t = \int_0^\pi e^{(1+2i)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}\right]_0^\pi = \frac{e^{(1+2i)\pi}-1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}(e^\pi - 1).$$

Par passage à la partie réelle, on conclut que

$$\boxed{K = \tfrac{e^\pi - 1}{5}.}$$

4. **Pour L :**
On réduit le numérateur pour faire apparaitre une forme $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{t+1}{4t^2+4t+10} = \frac{1}{8}\frac{8t+4}{4t^2+4t+10} + \frac{1}{2}\frac{1}{4t^2+4t+10}.$$

On met sous forme canonique le dénominateur du deuxième terme :

$$\frac{1}{4t^2+4t+10}=\frac{1}{(2t+1)^2+9}=\frac{1}{9}\frac{1}{\left(\frac{2t+1}{3}\right)^2+1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{8t+4}{4t^2+4t+10}+\frac{1}{18}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{3}\right)^2+1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8}\left[\ln(4t^2+4t+10)\right]_0^1+\frac{1}{18}\left[\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{2t+1}{3}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8}\ln\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{1}{12}\left(\arctan(1)-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{L=\tfrac{1}{8}\ln\left(\frac{9}{5}\right)+\frac{\pi}{48}-\frac{1}{12}\arctan\left(\frac{1}{3}\right).}$$

Exercice 2.

1. Supposons $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)=f(y)$. On a donc $\frac{x}{1+|x|}=\frac{y}{1+|y|}$, on en déduit donc que x et y sont de même signe.
   Traitons le cas x et y négatifs (le cas positifs se traite de la même manière). On a donc
   $$\frac{x}{1-x}=\frac{y}{1-y},$$
   soit $x(1-y)=y(1-x)$, d'où $x=y$.
   On conclut donc $\boxed{\text{l'application } f \text{ est injective.}}$
2. Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on a $f(x)=\frac{x}{1+x}$, on calcule alors $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x\in\mathbb{R}^-$, on a $f(x)=\frac{x}{1-x}$, on calcule alors $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant continue par les règles de composition, comme elle est strictement monotone, par le théorème de la bijection, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $A=f(\mathbb{R})$.
   On calcule pour $x>0$
   $$f(x)=\frac{x}{1+x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{x}=1.$$
   On calcule, de même, pour $x<0$
   $$f(x)=\frac{x}{1-x}\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{x}{-x}=-1.$$
   On conclut que $\boxed{f(\mathbb{R})=]-1,1[.}$
3. Par le théorème de la bijection utilisée à la question précédente, on a obtenu $\boxed{\tilde{f} \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1,1[.}$

Exercice 3.

Analyse :

Supposons :

$$A\cup B=B\cap C.$$

Comme $B\subset A\cup B$ et $B\cap C\subset C$, on a $B\subset C$.

On en déduit $B\cap C=B$.

Puis $A\subset A\cup B=B\cap C=B$, nous donne alors $A\subset B$.

On a donc nécessairement $A \subset B \subset C$.

Synthèse :

Réciproquement, si $A \subset B \subset C$, on a alors

$$A \cup B = B$$

Et

$$B \cap C = B.$$

On a bien $A \cup B = B \cap C$.

On conclut

$$\boxed{A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C.}$$

Exercice 4.

1. Montrons les trois propriétés vérifiées par une relation d'équivalence :
   Réflexivité :
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on a alors $A \cap A = A$ et $\bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}$.
   Comme x un élément de E et que $E = A \cup \bar{A}$. On a nécessairement $x \in A$ ou $x \in \bar{A}$.
   On conclut donc $A\mathcal{R}A$, donc la relation est réflexive.
   Symétrie :
   L'écrire.....
   Transitivité :
   Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, tel que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Montrons $A\mathcal{R}C$.
   Faisons une disjonction de cas :
   - Si $x \in A$.
     Comme $A\mathcal{R}B$, on a $x \in A \cap B$ ou $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.
     Comme $x \in A$, on a alors $x \notin \bar{A}$. Il en résulte que $x \notin \bar{A} \cap \bar{B}$.
     On a donc $x \in\in A \cap B$, or $A \cap B \subset B$, d'où $x \in B$.
     Comme $B\mathcal{R}C$, par le même raisonnement en remplaçant A par B et B par C, on a $x \in C$.
     Comme $x \in A$ et $x \in C$, on a $x \in A \cap C$, d'où $A\mathcal{R}C$.
   - Si $x \notin A$.
     Comme $A\mathcal{R}B$, on a $x \in A \cap B$ ou $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.
     Comme $x \notin A$, on a $x \in \bar{A}$ et $x \notin \bar{A} \cap \bar{B}$.
     On a donc $x \in\in \bar{A} \cap \bar{B}$, or $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}$, d'où $x \in \bar{B}$.
     Comme $B\mathcal{R}C$, par le même raisonnement en remplaçant A par B et B par C, on a $x \in \bar{C}$.
     Comme $x \in \bar{A}$ et $x \in \bar{C}$, on a $x \in \bar{A} \cap \bar{C}$, d'où $A\mathcal{R}C$.

   On a donc la transitivité de la relation.
2. Considérons $A = \{x\}$ et $B = \bar{A}$.
   Soit $C \in \mathcal{P}(E)$.
   Faisons une disjonction de cas :
   - Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$. On a donc $C\mathcal{R}A$.
   - Si $x \notin C$, alors $x \in \bar{A} = B$. On a donc $C\mathcal{R}B$.

   On a donc au plus 2 classes d'équivalence.
   Puis $A \cap B = A \cap \bar{A}\emptyset$ et $\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap A = \emptyset$, donc A et B ne sont pas en relation, donc il y a au moins deux classes d'équivalence.
   On conclut

$$\boxed{\text{Il y a exactement 2 classes d'équivalence.}}$$

Exercice 5.

1. Soit (f,g) un couple de fonctions solutions.
   (a) On remarque que les rôles de f et g sont symétriques. Soit F un primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$F(x) - F(0) = x - 1 + g(x),$$
   Soit $g(x) = 1-x+F(x)-F(0)$. En évaluant en $x = 0$, on obtient $g(0) = 1$. On conclut $\boxed{f(0) = g(0) = 1.}$
   (b) En reprenant, l'équation
   $$g(x) = 1 - x + F(x) - F(0).$$
   On en déduit que g est dérivable comme somme de fonctions dérivables ($x \mapsto x - 1 - F(0)$ est dérivable et F est dérivable , car primitive d'une fonction continue.) On en déduit par symétrie f et g dérivables et
   $$g'(x) = -1 + f(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = -1 + g(x).$$
   Comme $f-1$ et $g-1$ sont dérivables par les règles usuelles, on en déduit que f' et g' sont dérivables et
   $$g''(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = g'(x).$$
   On conclut
   $$\boxed{f \text{ et } g \text{ 2 fois dérivables.}}$$
   (c) Si f et g sont solutions, on a montré à la question précédente, que pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   $$g'(x) = -1 + f(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = -1 + g(x)$$
   et
   $$g''(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = g'(x).$$
   On en déduit donc que
   $$f''(x) = g'x) = -1 + f(x)$$
   Et on conclut
   $$\boxed{f''(x) - f(x) = -1. \quad (E)}$$
2. Faisons la synthèse découlant de l'analyse de la question 1. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée à E sont due la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, car équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$. On remarque que $x \mapsto 1$ est solution évidente. On a donc nécessairement f de la forme $f(x) = Ae^x + Be^{-x} + 1$. Comme on a montré que $f(0) = 1$, on a donc $A + B = 0$, soit $B = -A$. On a donc f nécessairement de la forme $f(x) = A(e^x - e^{-x}) + 1 = 2A\text{sh}\,(x) + 1$.
   Puis comme $g(x) = 1 + f'(x)$, on a nécessairement
   $$g(x) = 1 + 2A\text{ch}\,(x).$$
   Vérifions l'équation initiale, on a
   $$\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x 2A\text{sh}\,(t) + 1dt = 2A(\text{ch}\,(x) - 1) + x$$
   et
   $$x - 1 + g(x) = x - 1 + 1 + 2A\text{ch}\,(x) = x + 2A\text{ch}\,(x).$$
   Il faut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$x + 2A\text{ch}\,(x) = 2A(\text{ch}\,(x) - 1) + x,$$
   soit pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$0 = 2A,$$
   d'où $A = 0$. Le seul couple de solutions potentielles est donc $\boxed{(f,g) = (x \mapsto 1, x \mapsto 1).}$ On vérifie aisément que ce couple convient.

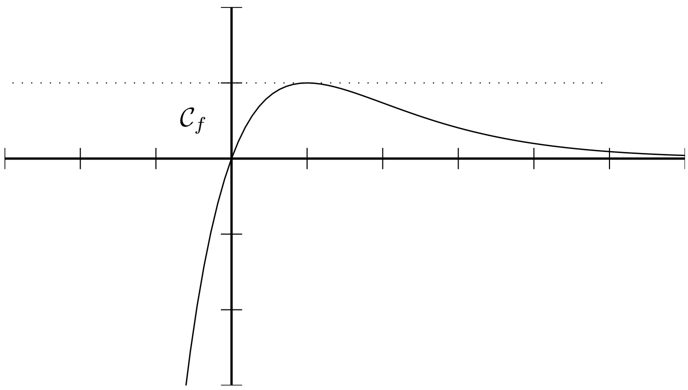
Exercice 6.

1. On a calcule la dérivée : $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ Le tableau de variations est alors

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour les limites, pas d'indétermination en $-\infty$ et pour $+\infty$, on a $f(x) = e\frac{x}{e^x}$, donc les croissances comparées permettent de conclure.

2. On remarque que $f(0) = 0$ et on trace alors



3. Appliquons une intégration par parties en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ u et v définies par

$$\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{1-t} & v(t) = -e^{1-t} \end{cases},$$

on a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 te^{1-t}\mathrm{d}t \\ &= \left[-te^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t}\mathrm{d}t \\ &= -1 - \left[e^{1-t}\right]_0^1 \\ &= e-2. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{I = e-2.}$

4. Pour $t \in [0,1]$, on a

$$1 \leq e^{1-t} \leq e.$$

Comme $t^n \geq 0$, on a donc

$$t^n \leq t^n e^{1-t} \leq t^n e.$$

Puis comme les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 t^n \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n e^{1-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n e\mathrm{d}t.$$

Soit

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

5. Appliquons une intégration par parties en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ u et v définies par

$$\begin{cases} u(t) = t^{n+1} & u'(t) = (n+1)t^n \\ v'(t) = e^{1-t} & v(t) = -e^{1-t} \end{cases},$$

on a alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1}e^{1-t}\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^{n+1}e^{1-t}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n e^{1-t}\mathrm{d}t \\ &= -1+(n+1)I_n \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.}$

6. (a) En utilisant le résultat de la question 5, on a

$$k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e - ((n+1)I_n - 1)$$

Soit

$$k_{n+1} = (n+1)\left(n!e - I_n)\right) + 1 = (n+1)k_n + 1$$

On a donc $\boxed{k_{n+1} = (n+1)k_n + 1.}$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, k_n est un nombre entier.
Initialisation :
Pour $n = 1$, grâce au calcul de la question 3, on a

$$k_1 = 1!e - I_1 = e - (e-2) = 2.$$

La propriété est donc initialisée.
Hérédité :
Soit n fixé, supposons que k_n est un nombre entier.
On a alors $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$ est un nombre entier.
Par initialisation et hérédité, on conclut donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ k_n \text{ est un nombre entier.}}$$

(c) Grâce à la question 4, on a

$$-\frac{e}{n+1} \leq -I_n \leq -\frac{1}{n+1}\cdot$$

D'où

$$n!e - \frac{e}{n+1} \leq n!e - I_n \leq n!e - \frac{1}{n+1}\cdot$$

On a donc bien

$$\boxed{n!e - \frac{e}{n+1} \leq k_n \leq n!e - \frac{1}{n+1}\cdot}$$

7. Pour $n \geq q$, on a

$$n!\frac{p}{q} = p\prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq q}} I \in \mathbb{N}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq q,\ n!\tfrac{p}{q} \text{ est un entier.}}$$

8. Suppons $e = \frac{p}{q}$, grâce à la question 6, on a

$$n!e - \frac{e}{n+1} \leq k_n \leq n!e - \frac{1}{n+1}\cdot$$

Soit

$$-\frac{e}{n+1} \leq k_n - n!e \leq -\frac{1}{n+1}\cdot$$

Si on choisit $n \geq q$, on a donc que$k_n - n!e = k_n - n!\frac{p}{q}$ est un entier. Si on prend de plus $n \geq 2$, on a alors

$$-1 < -\frac{e}{n+1} \leq k_n - n!e \leq -\frac{1}{n+1} < 0\cdot$$

Impossible, il n'y a pas d'entier strictement compris entre -1 et 0.
On conclut

$$\boxed{e \text{ est un nombre irrationnel.}}$$

Exercice 7.

1. On rappelle que si f est une fonction continue sur l'intervalle J et α et β sont 2 fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur intervalle I à valeurs dans J sur alors la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et on a
$$\varphi'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)).$$
On en déduit
$$f'(x) = \arctan(x+1)e^{x+1} - \arctan(x)e^x = e^x\left(\arctan(x+1)e^1 - \arctan(x)\right).$$
Comme $e^x > 0$, on a donc
$$\boxed{f'(x) = e^x\left(\arctan(x+1)e^1 - \arctan(x)\right) \text{ qui est de même signe que } \arctan(x+1)e^1 - \arctan(x).}$$

2. On définie la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = \arctan(x+1)e^1 - \arctan(x)$.
   (a) On calcule la dérivée de v et on obtient
   $$v'(x) = \frac{e^1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(e^1-1)x^2 - 2x + e - 2}{\left(1+(1+x)^2\right)\left(1+x^2\right)}.$$
   Le dénominateur est strictement positif et le numérateur est un trinôme de degré 2 avec pour discriminant $4 - 4(e-1)(e-2)$. Eu utilisant $e > \frac{8}{3}$, on obtient $4(e-1)(e-2) > 4 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{9} > 4$. Le discriminant est strictement négatif, donc le numérateur ne change pas de signe et reste strictement positif. La dérivée est donc strictement positive. On conclut
   $$\boxed{\text{la fonction } v \text{ est strictement croissante.}}$$
   (b) Le calcul des limites ne comporte aucune indétermination et on obtient le tableau

x	$-\infty$	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	
$v(x)$	$-\frac{\pi}{2}(e^1-1)$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}(e^1-1)$

3. Le signe de la dérive de f est donnée par le signe de v, or la fonction v est continue strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et change de signe. Donc par le théorème de la bijection, la fonction v ne s'annule qu'une unique fois en un point α, il en est de même pour f'.
4. On remarque que
   - $v(-1) = \arctan(1) > 0$
   - $v(-2) = e\arctan(-1) + \arctan(2) = -e\frac{\pi}{4} + \arctan(2) < 0$, car $e > 2$ et $\arctan 2 < \frac{\pi}{2}$.

   On conclut $\boxed{\alpha \in [-2, -1].}$
5. Pour $t \in [x, x+1]$, on a par croissance de arctan
$$\arctan(x) \leq \arctan(t) \leq \arctan(x+1).$$
Comme $e^t \geq 0$, il en résulte
$$\arctan(x)e^t \leq \arctan(t)e^t \leq \arctan(x+1)e^t.$$
Par intégration, on obtient
$$\begin{aligned}\arctan(x)\left(e^{x+1} - e^x\right) &= \int_x^{x+1} \arctan(x)e^t\mathrm{d}t \\ &\leq \int_x^{x+1} \arctan(t)e^t\mathrm{d}t = f(x) \leq \int_x^{x+1} \arctan(x)e^t\mathrm{d}t = \arctan(x+1)\left(e^{x+1} - e^x\right) \quad (1)\end{aligned}$$

On a

$$\arctan(x)\left(e^{x+1}-e^x\right) = \underbrace{\arctan(x)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}}(e^1-1)\underbrace{e^x}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty}.$$

Comme $e^1-1>0$, on conclut, par minoration que $\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty}$.

De même, on a

$$\arctan(x)\left(e^{x+1}-e^x\right) = \underbrace{\arctan(x)}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}}(e^1-1)\underbrace{e^x}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0}$$

et

$$\arctan(x+1)\left(e^{x+1}-e^x\right) = \underbrace{\arctan(x+1)}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}}(e^1-1)\underbrace{e^x}_{\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0},$$

on conclut donc par encadrement que $\boxed{f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0}$.

6. Grâce à l'encadrement (1), on a

$$\boxed{\arctan(x)\left(e^1-1\right) \leq e^{-x}f(x) \leq \arctan(x+1)\left(e^1-1\right).}$$

7. En utilisant l'inégalité de la question précédente, par le théorème des gendarmes, on a

$$e^{-x}f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}(e^1-1)$$

et on conclut

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}(e-1)e^x.}$$

8. L'étude des variations de f nous donne le tableau suivant

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

On sait que $\alpha\in[-2,-1]$.

On a donc un asymptote horizontale $y=0$ en $-\infty$. L'équivalent de la question précédente donne un explosion exponentielle de la courbe.

On trace alors