Devoir surveillé 3

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Une copie double est obligatoire en première copie. Les suivantes peuvent être simples, en particulier pour les exercices courts.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice. **Le deuxième exercice sur une copie, s'il n'est pas corrigé, ne pourra pas faire l'objet de réclamations.**
- Mettre son nom sur chaque feuille.
- Numéroter chaque copie sous la forme [numéro de copie/ nombre total de copies].
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^5(t)\mathrm{d}t \qquad J = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t,$$

$$K = \int_0^{\pi} \cos(2t)e^t\mathrm{d}t \qquad L = \int_0^1 \frac{t+1}{4t^2+4t+10}\mathrm{d}t$$

Exercice 2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f est injective. *(On pourra penser à discuter en fonction du signe.)*
2. Déterminer $A = f(\mathbb{R})$.
3. On considère $\tilde{f}$ la corestriction de f à A, c'est-à-dire $\tilde{f}$ définie de $\mathbb{R}$ dans A par $\tilde{f}(x) = f(x)$. L'application $\tilde{f}$ est-elle bijective ?

Exercice 3. Soit A, B, C 3 parties d'un ensemble E.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour que

$$A \cup B = B \cap C.$$

On utilisera des inclusions.

Exercice 4.

Soient E un ensemble non vide et x un élément de E, on définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le nombre de classes d'équivalence.

Exercice 5. On cherche à déterminer les fonctions continues f et g sur $\mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x - 1 + g(x) \quad \text{et} \quad \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = x - 1 + f(x).$$

1. Soit (f, g) un couple de fonctions solutions.
   (a) Déterminer $f(0)$ et $g(0)$.
   (b) Justifier que f et g sont 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$f''(x) - f(x) = -1.$$

2. Déterminer toutes les solutions du problème.

Exercice 6.

Partie A :

Soit f la fonction définit que $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. Etudier les variations de f (on précisera les limites).
2. Tracer la courbe de f.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Partie B : L'objectif de cette partie est de montrer que le nombre e $(= \exp(1))$ est irrationnel.

Pour un entier $n \geq 1$, on définit

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{1-t}\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

6. On définit la suite (k_n) par $k_n = n!e - I_n$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre k_{n+1} et k_n.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, k_n est un nombre entier.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$n!e - \frac{e}{n+1} \leq k_n \leq n!e - \frac{1}{n+1}.$$

7. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $n \geq q$, $n!\frac{p}{q}$ est un entier.
8. Supposer que e est rationnel, obtenir une contradiction.

Exercice 7.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_x^{x+1} \arctan(t)e^t \mathrm{d}t$$

1. Calculer la dérivée de $f(x)$ et montrer que son signe est donné par le signe de $\arctan(x+1)e^1 - \arctan(x)$.
2. On définie la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = \arctan(x+1)e^1 - \arctan(x)$.
   (a) Justifier que v est strictement croissante. (On pourra admettre que $e^1 > \frac{8}{3}$.)
   (b) Donner le tableau de variations de v. On calculera les limites aux bornes.
3. Montrer que la dérivée de f s'annule une unique fois en un point α que l'on ne cherchera pas à exprimer.
4. Donner un encadrement de α par 2 entiers consécutifs.
5. Montrer que la fonction f admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$, éventuellement infinie(s).
   (Penser à encadrer $\arctan(t)$*)*
6. En utilisant l'indication de la question précédente, encadrer $f(x)e^{-x}$.
7. (Facultatif $\star$) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
8. Tracer la courbe de f. (On pensera à regrouper toutes les informations obtenues)