Devoir surveillé 2

Exercice 1.

En utilisant le formulaire trigonométrique, on a

$$\begin{aligned}\tan A &= \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \frac{\frac{1}{7} - \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1+\frac{1}{7}\cdot\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\\ &= \frac{\frac{1}{7} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1+\frac{1}{7}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -1\end{aligned}$$

On en déduit que $A \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

Comme $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{2}$ sont deux éléments de $[0,1]$, on en déduit par croissance de la fonction arctan que

$$0 \leq \arctan\frac{1}{7} \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \arctan\frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{4}, \text{ d'où}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}.$$

On conclut donc $\boxed{A = -\frac{\pi}{4}.}$

Exercice 2.

1. Le dénominateur et le numérateur de f sont composés de fonctions définies sur $\mathbb{R}$
   La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x$ est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes et s'annule en 0. Par le théorème de la bijection, le dénominateur ne s'annule qu'en 0, donc $D_f = \mathbb{R}^*$. En utilisant la définition de sh et ch, on a

   $$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 3x = \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{2} + \frac{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x}}{2}$$

   et

   $$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x = \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{2} - \frac{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x}}{2}.$$

   Comme $x \neq 0$, on a $e^x \neq 1$ et il en résulte

   $$e^x + e^{2x} + e^{3x} = e^x\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right)$$

   et

   $$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} = e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x} = e^{-3x}\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right).$$

   On en déduit

   $$\frac{e^x\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right) + e^{-3x}\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right) - e^{-3x}\left(\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\right)} = \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1} = \frac{1}{\operatorname{th} 2x}.$$

   On conclut

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}^* \text{ et } f(x) = \frac{1}{\operatorname{th} 2x}.}$$

2. On factorise l'expression du membre de droite, on a donc

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

On cherche donc les nombres x tel que

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Comme $x \in [-\pi, \pi]$, on a donc $x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$.
On dessine le cercle trigonométrique, comme l'on parcourt un intervalle de longueur 2π, il suffit d'exclure les valeurs de l'intervalle $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$. Il faut donc $x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi] \cup [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$. On conclut que l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = [-\pi, 0] \cup [\tfrac{\pi}{2}, \pi].}$$

Exercice 3.

1. Etudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. On calcule $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ et on en déduit le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}^{+*}$, on en déduit

$$\boxed{\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} = f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 2.}$$

2. Utilisons l'inégalité précédente, pour les couples $(a+b, a+c)$, $(b+a, b+c)$ et $(c+a, c+b)$, on a donc

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} \geq 2,$$

$$\frac{b+a}{b+c} + \frac{b+c}{b+a} \geq 2$$

et

$$\frac{c+a}{c+b} + \frac{c+b}{c+a} \geq 2.$$

Par sommation, on a donc

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+a}{b+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b} + \frac{c+b}{c+a} \geq 6.$$

En regroupant les termes, on a donc

$$\frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b+a}{b+a} + \frac{c+a}{c+a} \geq 6,$$

d'où

$$\frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} \geq 3.$$

On conclut donc

$$\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.}$$

3. Pour qu'il y est égalité dans la question 1, grâce à l'étude de fonction, il faut que $\frac{x}{y}=1$, soit $x=y$. Pour l'inégalité de la question 2, il faut que les inégalités utilisés soit des égalités, donc $a+b=a+c$, $b+a=b+c$ et $c+a=c+b$. Il en résulte $a=b=c$ est une condition nécessaire et suffisante d'égalité.

Exercice 4.

1. La fonction f_n est strictement croissante par les règles de composition des fonctions strictement croissantes, on a donc

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Comme la fonction est strictement croissante et continue et $1\in f_n(\mathbb{R}^+)=[0,+\infty[$, par le théorème de la bijection, on conclut donc

$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x)=1 \text{ admet une unique solution positive } x_n.}$$

2. On remarque que $f_n(1)=1+\arctan\left(\frac{1}{n}\right)>0$. Par croissance de f_n, on conclut donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est majorée par 1.}}$$

3. Comme $0\leq x_n\leq 1$ et que la fonction arctan est croissante, on a

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+\arctan\frac{x_n}{n+1}\leq x_n^n+\arctan\frac{x_n}{n}=1.$$

Par croissance de f_{n+1}, on en déduit que $x_{n+1}\geq x_n$ et on conclut donc que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$$

4. La suite (x_n) est croissante majorée par 1, elle converge donc par valeur inférieure vers une limite $\ell\leq 1$. Supposons $\ell<1$, on a alors $0<x_n^n+\arctan\left(\dfrac{x_n}{n}\right)\leq \ell^n+\arctan\left(\dfrac{\ell}{n}\right)$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_n f_n(x_n)=0$. Ce qui est contradictoire avec $f_n(x_n)=1$. On conclut donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers 1.}}$$

Exercice 5.

1. (a) On a
$$a_3 = \sqrt{3} + i = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$
Il en résulte :
$$Z_3 = \frac{a_3}{\overline{a_3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
(b) Les racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité sont
$$\omega_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, \qquad k = 0..5.$$
On a donc $\boxed{Z_3 = \omega_1 \text{ est une racine } 6^{\text{ème}} \text{ de l'unité}}$

2. (a) On a
$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^1 = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+2i}{3} \neq 1.$$
On a donc $\boxed{n \neq 1}$

(b) Pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, on a
$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) = a' + b'i$$
$$\text{et } (a+ib)(c+id) = (ab-cd) + (ad+bc)i = a'' + ib'',$$
où $a', b', a'', b'' \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire que les éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{Z}$ sont stables sous l'addition et la multiplication.
Il en résulte que
$$\forall n \geq 2, \quad \forall k \in [1, n-1], \qquad (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \text{ est un élément de la forme } A + iB, \text{ avec } A, B \in \mathbb{Z}$$
et
$$\frac{S}{2-i} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \text{ aussi.}$$

(c) On a
$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k} - (2i)^n - (2-i)^n = (2+i)^n - (2i)^n - (2-i)^n,$$
grâce à la formule du binôme Newton. Or
$$Z_4^n = 1 \Longleftrightarrow \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = 1 \Longleftrightarrow (2+i)^n = (2-i)^n$$
Et donc
$$\boxed{S = -(2i)^n}$$

(d) Comme on a prouvé que $S = -(2i)^n = (2-i)(A+iB)$ avec $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$, si on passe aux modules on obtient :
$$|S|^2 = 2^{2n} = 5(A^2 + B^2)$$
Or 2^{2n} n'est pas divisible par 5, donc on a trouvé une absurdité.
Finalement $\boxed{\text{il n'existe aucun entier } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } Z_4^n = 1}$

Problème :

1. (a) Soit les formes exponentielles de z_1 et z_2, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ les modules et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ les arguments. On a donc $\overline{z_1} z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$. On a donc directement

$$\overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}^{+*} \iff \theta_2 - \theta_1 \equiv 0[2\pi].$$

On conclut

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \quad \arg(z_1) = \arg(z_2) \iff \overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}^{+*}.}$$

(b) Comme les quantités sont positives, on peut comparer les carrés, on a, en utilisant les conjugués ($|z|^2 = \overline{z} z$ et $\overline{z} + z = 2\mathrm{Re}(z)$.),

$$\begin{aligned}
(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| - |z_1 + z_2|^2 \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + 2|z_1||z_2| - z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1} z_2 - \overline{z_2} z_1 \\
&= 2|z_1||z_2| - 2\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) = 2(|\overline{z_1} z_2| - \mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2))
\end{aligned}$$

Comme pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ avec l'égalité $\mathrm{Re}(z) = |z|$ si et seulement si z est un réel positif, on conclut

$$\boxed{\text{Pour tous } z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ avec égalité si et seulement si } \overline{z_1} z_2 \text{ est un réel positif.}}$$

(c) Montrons cette propriété par récurrence pour $n \geq 1$.
Initialisation :
Pour $n = 1$, c'est évident. (Pour $n = 2$, cela a été démontré à la question précédente.)
Hérédité :
Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$, c'est-à-dire pour tous $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

avec égalité si et seulement si pour tous $i < j \in [\![1, n]\!]$.
Soient $z_1, \cdots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, en utilisant la propriété au rang n, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| + |z_n + z_{n+1}|$$

avec égalité si et seulement si pour tous $i < j \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \overline{z_i} z_j \in \mathbb{R}^+$ et tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \overline{z_i}\,(z_n + z_{n+1})$.
De plus grâce à la question précédente, on a $|z_n + z_{n+1}| \leq |z_n| + |z_{n+1}|$ avec égalité si et seulement si $\overline{z_n} z_{n+1} \in \mathbb{R}^+$.
On en déduit que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

avec égalité si et seulement si

- pour tous $i < j \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \overline{z_i} z_j \in \mathbb{R}^+$
- pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \overline{z_i}\,(z_n + z_{n+1})$
- $\overline{z_n} z_{n+1} \in \mathbb{R}^+$.

Si $z_n = 0$, la condition est directement équivalente à pour tous $i < j \in [\![1, n+1]\!]$, $\quad \overline{z_i} z_j \in \mathbb{R}^+$.
Si $z_n \neq 0$, comme la dernière condition donne $\overline{z_n} z_{n+1} = \lambda \in \mathbb{R}^+$, on a alors $z_{n+1} = \lambda \frac{z_n}{|z_n|^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et on vérifie à nouveau que la condition d'égalité est équivalente à pour tous $i < j \in [\![1, n+1]\!]$, $\quad \overline{z_i} z_j \in \mathbb{R}^+$. On conclut

> Pour tous $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$,
> $$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$
> avec égalité si et seulement si pour tous $i < j \in [\![1, n]\!]$, $\overline{z_i} z_j$ est un réel positif.

2. (a) On calcule, comme $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ et que $|z|^2 = \overline{z}z$,

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z_k - z) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z_k - z \underbrace{\overline{\sum_{k=1}^{n} a_k}}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{z_k}{|z_k|}} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} |z_k| \end{aligned}$$

Comme un module est réel positif et que les z_k sont non nuls, on conclut

$$\boxed{S(z) \text{ est un réel strictement positif indépendant de } z \text{ et } S(z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.}$$

(b) En utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, on a

$$|S(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\overline{a_k}(z_k - z)|\,.$$

Comme $S(z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ est un réel positif et $|a_k| = \frac{|z_k|}{|z_k|} = 1$. On conclut

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|\,.}$$

(c) Grâce à la question 1.(a) et 1.(c), on sait qu'il y a égalité si et seulement la famille $(a_k(z - z_k))_{k \in [\![n]\!]}$ est composé de nombres complexes non nuls de même argument ou de nombres complexes nuls. On peut donc écrire $a_k(z - z_k) = r_k e^{i\theta}$ avec r_k réel positif éventuellement nul. Par sommation, on a donc

$$S(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k(z - z_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right) e^{i\theta}.$$

Or $S(z)$ est un réel positif strictement positif, donc $\theta \equiv 0[2\pi]$. Une condition nécessaire d'égalité est donc que les $a_k(z - z_k)$ non nuls soient des réels strictements positifs. La réciproque est directe. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|\,. \\ \text{avec égalité, si et seulement si } \forall k \in [\![1, n]\!]\,, \quad \overline{a_k}(z_k - z) \in \mathbb{R}^+. \end{array}}$$

Remarque, cette condition est atteint pour $z = 0$, car $\overline{a_k} z_k = |z_k|$.

3. (a) En prenant l'interprétation des distances par les modules, on a

$$f(M) = \sum_{k=1}^{n} M_k M = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$

La condition $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ est équivalente géométriquement $\sum_{k=1}^{n} \frac{\overrightarrow{OM_k}}{\left\|\overrightarrow{OM_k}\right\|} = \overrightarrow{0}$.

On en déduit que

$$\boxed{\text{La somme des distances du point } M \text{ aux points } (M_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ est minorée par } \sum_{k=1}^{n} |z_k| \text{ et cette valeur est atteint pour } M = O.}$$

(b) Pour que $M(z)$ atteigne le minimum, il faut que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{a_k}(z_k - z)$ soit un réel positif. Grâce à la question 1, on a donc que $a_k = \frac{z_k}{|z_k|}$ et $z_k - z$ est même argument donc que z_k et $z_k - z$ est même argument. On en déduit que les vecteur $\overrightarrow{OM_k}$ et $\overrightarrow{MM_k}$ forme un angle nul, le point M est donc sur la demi-droite issue de M_k passant par O. Si les points (M_k) ne sont pas alignés, une seule solution $M = O$, sinon le segment d'extrémités les 2 points qui encadre O.

4. (a) Le cours nous donne que $\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ (somme des racines n-èmes). On peut donc appliquer les résultats démontré dans les question précédentes.

On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$

Or $|z_k| = \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1$, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$

et on conclut

$$\boxed{n \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|.}$$

(b) En appliquant la formule précédente à $z = 1$, on obtient

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} \left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|.$$

Par Euler, on a

$$\left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

Par positivité du sinus sur $[0, \pi]$, on a donc $\left|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. On en déduit

$$n \leq 2\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

donc

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Comme $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq 1$, on conclut

$$\boxed{\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n.}$$

(c) On a par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Comme $e^{i\frac{k\pi}{n}} \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{\frac{i(n+1)\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}\cdot$$

Soit par Euler,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{\frac{i\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2e^{i\frac{k\pi}{2n}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = -\frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}}}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\cdot$$

On calcule la partie imaginaire,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}}}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cdot$$

On a donc, en utilisant la question précédente,

$$\frac{n}{2} \leq \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \leq n\cdot$$

En passant à l'inverse, on conclut

$$\boxed{\frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \frac{2}{n}\cdot.}$$

Exercice 6. $\star\star$