# Devoir surveillé 2

## Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Une copie double est obligatoire en première copie. Les suivantes peuvent être simples, en particulier pour les exercices courts.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice. **Le deuxième exercice sur une copie, s'il n'est pas corrigé, ne pourra pas faire l'objet de réclamations.**
- Mettre son nom sur chaque feuille.
- Numéroter chaque copie sous la forme [numéro de copie/ nombre total de copies].
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

**Exercice 1.** Simplifier

$$A = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

**Exercice 2.**

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et simplifier son expression
$$f(x) = \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 3x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 3x}.$$
2. Résoudre pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x + \sin x \leq 1$.

**Exercice 3.**

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$
(*On pourra introduire une fonction.)*
2. En déduire que si $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$, on a
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$
3. Déterminer les cas d'égalité dans les inégalités des questions 1 et 2.

**Exercice 4.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + \arctan(\frac{x}{n})$.

1. Montrer l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution positive que l'on notera $x_n$.
2. Majorer $x_n$ par une valeur simple.
3. Etudier la quantité $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)$.
4. Montrer que la suite $(x_n)$ converge vers une limite $\ell$ à préciser.

**Exercice 5.** Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $a_p = \sqrt{p} + i$ et $Z_p = \dfrac{a_p}{\overline{a_p}}$.

1. Dans cette question, on considère les cas $p = 3$.
   (a) Donner la forme polaire (encore appelée forme trigonométrique) de $a_3$.
   (b) Préciser les racines $6^{\text{ème}}$ de 1 et vérifier que $Z_3$ en est une.
2. Dans cette question, on suppose que $p = 4$.
   Le but de cette question est de prouver que $Z_4 = \dfrac{2+i}{2-i}$ n'est, pour aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$, une racine $n^{\text{ème}}$ de 1. On va raisonner par l'absurde, on suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Z_4^n = 1$.
   (a) Est-il possible que $n = 1$ ?
   (b) On suppose désormais $n \geq 2$ et on définit la somme
   $$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k}.$$
   Prouver l'existence de $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $S : (2-i) \times (A + iB)$.
   (c) En revenant à sa forme initiale et en utilisant l'hypothèse sur $Z_4$, montrer que $S = -(2i)^n$.
   (d) Conclure, après avoir calculé de deux manières différentes le module de $S^2$.

## Problème :

1. (a) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, montrer qu'on a
$$\arg(z_1) = \arg(z_2) \Longleftrightarrow \overline{z_1} z_2 \in \mathbb{R}^{+*}.$$
   (b) Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement si $\overline{z_1} z_2$ est un réel positif.
   (c) Montrer que pour tous $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$
   avec égalité si et seulement si pour tous $i < j \in [\![1, n]\!]$, $\overline{z_i} z_j$ est un réel positif.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^*$.

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $a_k = \frac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. On pose
$$S(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(z_k - z).$$
   (a) Montrer que $S(z)$ est un réel positif indépendant de $z$ et l'exprimer en fonction des $z_1, \cdots, z_n$.
   (b) En déduire que pout tout $z \in \mathbb{C}$
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|.$$
   (c) Montrer de plus que c'est une égalité, si et seulement si
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \overline{a_k}(z_k - z) \in \mathbb{R}^+.$$
3. Dans le plan complexe, on note les points $M_1, \cdots, M_n$ d'affixe $z_1, \cdots, z_n$.

   On conserve les notations et les hypothèses de la question précédente en particulier $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. On note $O$ le point d'affixe nul.
   (a) Interpréter géométrique le résultat de la question 2.

   On pourra introduire l'application $f$ définie du plan dans $\mathbb{R}$ par $f(M) = \sum_{k=1}^{n} M_k M$.
   (b) Déterminer l'ensemble des point $\Gamma$ où la fonction $f$ atteint son minimum. On distinguera suivant que les points $M_1, \cdots, M_n$ sont alignés ou non.
4. Dans cette question, on choisit $n \geq 2$ et pour $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$n \leq \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$$
   (b) En déduire
$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq n.$$
   (c) Puis que
$$\frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \frac{2}{n}.$$

**Exercice 6.** ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on définit
$$Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

On cherche à calculer une forme réduite de $|Z_n|^2$.

1. Ecrire $|Z_n|^2$ sous forme d'un somme double.
2. Regrouper les termes diagonaux en utilisant la périodicité de $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminer le calcul.