Devoir surveillé 1

Exercice 1.

Les quantités $x+3$, $2x+3$ et $x-1$ s'annulent respectivement en -3,$-\frac{3}{2}$,1, on en déduit le tableau suivant

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$\lvert 2x+3\rvert$	$-2x-3$	$-2x-3$	$2x+3$	$2x+3$	
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$	
$-\lvert x+3\rvert+\lvert 2x+3\rvert-2\lvert x-1\rvert$	$x-2$	$-x-8$	$3x-2$	$-x+2$	

On traite alors chaque intervalle :

(i) Si $x\in]-\infty,-3]$, il faut $x-2\leq -1$, soit $x\leq 1$. On a donc $x\in]-\infty,-3]$.

(ii) Si $x\in[-3,-\frac{3}{2}]$, il faut $-x-8\leq -1$, soit $-7\leq x$. On a donc $x\in[-3,-\frac{3}{2}]$.

(iii) Si $x\in[-\frac{3}{2},1]$, il faut $3x-2\leq -1$, soit $x\leq\frac{1}{3}$. On a donc $x\in[-\frac{3}{2},\frac{1}{3}]$.

(iv) Si $x\in[1,+\infty[$, il faut $-x+2\leq -1$. On a donc $x\in[3,+\infty[$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-3]\cup[-3,-\tfrac{3}{2}]\cup[-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{3}]\cup[3,+\infty[=]-\infty,\tfrac{1}{3}]\cup[3,+\infty[.}$$

Exercice 2.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&a^2\\ x&+&2y&+&3z&=&1\\ 2x&+&(b+1)y&&&=&2a.\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&a^2\\ &&y&+&2z&=&1-a^2\\ &&(b-1)y&-&2z&=&2a-2a^2.\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&a^2\\ &&y&+&2z&=&1-a^2\\ &&by&&&=&1+2a-3a^2.\end{array}\right.$$

Si $b\neq 0$, on obtient une unique solution en remontant.

Si $b=0$, la dernière ligne n'est compatible que si $1+2a-3a^2=0$, soit si $a=1$ ou $a=-\frac{1}{3}$ et le nombre de solutions est alors infini.

On conclut

1. Si $b\neq 0$, le système a une unique solution.
2. Si $b=0$ et $a\in\left\{1;-\dfrac{1}{3}\right\}$, il y a une infinité de solution.
3. Si $b=0$ et $a\notin\left\{1;-\dfrac{1}{3}\right\}$, il n'y a aucune solution.

Exercice 3.

En reformulant, on peut écrire

$$S_n = \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 1\leq i\leq j\leq k\leq n}} \max(i,j,k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} \max(i,j,k).$$

Soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} k.$$

On calcule en utilisant les sommes usuelles :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} jk = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{k} j.$$

Puis

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^3 + k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n(n+1)+2(2n+1)}{24}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 1\leq i\leq j\leq k\leq n}} \max(i,j,k) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.}$$

Exercice 4.

1. Le cours nous donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

2. On peut faire la démonstration par récurrence, mais il est ici plus rapide d'utiliser les résultats du cours sur les sommes, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right).$$

Soit

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

3. (a) On a déjà calculé

$$\boxed{S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad S_2(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

(b) On conjecture, que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^*$,

$$S_p(n) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{p+1}.$$

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a

$$S_p(1) = \sum_{k=1}^{1} (k)_p = \prod_{k=0}^{p-1}(1+k) = p! = \frac{\prod_{k=0}^{p}(1+k)}{p+1}.$$

La propriété est donc initialisée.

Hérédité :

Supposons que pour un rang n fixé, on a

$$S_p(n) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{p+1}.$$

Considérons $S_p(n+1)$, on a

$$S_p(n+1) = S_p(n) + \prod_{k=0}^{p-1}(n+1+k)$$

Soit en utilisant l'hypothèse de récurrence ;

$$S_p(n+1) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{p+1} + \prod_{k=0}^{p-1}(n+1+k)\cdot$$

En faisant un décalage d'indice $k+1 \leftrightarrow k$ sur le produit de droite, on a

$$S_p(n+1) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{p+1} + \prod_{k=1}^{p}(n+k)\cdot$$

On décompose le produit de gauche

$$S_p(n+1) = \frac{n\prod_{k=1}^{p}(n+k)}{p+1} + \prod_{k=1}^{p}(n+k)\cdot$$

Par factorisation, on a donc

$$S_p(n+1) = \frac{\prod_{k=1}^{p}(n+k)}{p+1}\,(n+p+1)\cdot$$

Soit

$$S_p(n+1) = \frac{\prod_{k=1}^{p+1}(n+k)}{p+1}\cdot$$

On décale à nouveau l'indice et obtient

$$S_p(n+1) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+1+k)}{p+1}\cdot$$

Comme la propriété est initialisée et héréditaire pour un entier p quelconque, on conclut

$$\boxed{\text{Pour tout } (p,n) \in \mathbb{N}^*, \quad S_p(n) = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{p+1}\cdot}$$

Exercice 5.

1. On calcule les deux membres, en utilisant les factorielles et on obtient

$$\binom{a}{c}\binom{c}{b} = \frac{a!}{c!(a-c)!}\frac{c!}{b!(c-b)!} = \frac{a!}{(a-c)!(c-b)!b!}$$

et

$$\binom{a}{b}\binom{a-b}{a-c} = \frac{a!}{b!(a-b)!}\frac{(a-b)!}{(a-c)!(a-b-(a-c))!} = \frac{a!}{(a-c)!(c-b)!b!}.$$

On conclut donc bien

$$\boxed{\tbinom{a}{c}\tbinom{c}{b} = \tbinom{a}{b}\tbinom{a-b}{a-c}.}$$

2. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$S_1 = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{n-k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$$

Comme k, n sont globaux, on obtient

$$S_1 = \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell}.$$

On utilise le binôme de Newton

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^{\ell} \cdot 1^{k-\ell} = 2^k.$$

On conclut $\boxed{S_1 = \tbinom{n}{k} 2^k.}$ En utilisant à nouveau le résultat de la question précédente, on a

$$S_2 = \sum_{\ell=p}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{p} = \sum_{\ell=p}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-\ell}.$$

Par changement d'indice $n - \ell = i$ soit $\ell = n - i$, on obtient

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{n-(n-i)} \binom{n}{p}\binom{n-p}{i} = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{i} \binom{n}{p}\binom{n-p}{i}.$$

Comme p, n sont globaux, on obtient

$$S_2 = \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{i} \binom{n-p}{i}.$$

Le binôme de Newton nous donne alors

$$S_2 = \binom{n}{p} (1-1)^{n-p} = 0.$$

On conclut $\boxed{S_2 = \sum_{\ell=p}^{n} (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{p} = 0.}$

Exercice 6.

1. Pour $t \in [0,1]$, on a $1 \leq 1+t^2 \leq 2$. Par positivité, on en déduit
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$
puis comme $t^n \geq 0$,
$$\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq 1.$$
On conclut que
$$\boxed{\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n.}$$

2. Comme les bornes sont dans le bon sens, en intégrant l'inégalité précédente, on obtient
$$\int_0^1 \frac{t^n}{2}\mathrm{d}t \leq I_n \leq \int_0^1 t^n \mathrm{d}t,$$
soit
$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$
Par le théorème des gendarmes, on conclut
$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

3. On calcule
$$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$
On conclut donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+2} = \tfrac{1}{n+1}.}$$

4. Pour $t \in [0,1]$, on a
$$t^n \leq t^{n+1},$$
on en déduit
$$\frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}.$$
Soit en intégrant (bornes dans le bon sens),
$$I_{n+1} \leq I_n.$$
On conclut que $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$

5. En utilisant la décroissance, pour $n \geq 2$, on a
$$I_{n+2} \leq I_n \leq I_{n-2},$$
puis
$$I_{n+2} + I_n \leq I_n + I_n \leq I_{n-2} + I_n,$$
soit en utilisant la question 3
$$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n-1}.$$
On conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \tfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \tfrac{1}{2(n-1)}.}$$

6. En utilisant la question précédente, on a donc, pour $n \geq 2$
$$\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)},$$
soit
$$\frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \leq nI_n \leq \frac{1}{2(1-\frac{1}{n})}.$$
En utilisant le théorème des gendarmes, on conclut
$$\boxed{nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$$

7. On remarque une forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$ et on calcule
$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right] = \frac{\ln 2}{2}.$$
En utilisant la question 3, on en déduit donc
$$I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2), \quad I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}).$$
On conclut
$$\boxed{I_1 = \frac{\ln 2}{2},\ I_3 = \frac{1}{2}(1-\ln 2) \text{ et } I_5 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).}$$

8. (a) On remarque que
$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Comme $-t^2 \neq 1$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^k = \frac{t}{1+t^2}\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}.$$
On a donc
$$S_n = \int_0^1 t\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n+3}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t.$$
On conclut que
$$\boxed{S_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t + (-1)^n\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t, \text{ où } g_n(t) = \frac{t^{2n+3}}{(1+t^2)^2}.}$$
où g_n est une fonction dont on donnera l'expression réduite.

   (b) Par la même méthode qu'à la question 1, on a
$$\boxed{\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^{2n+3}}{4} \leq g_n(t) \leq t^{2n+3}}$$

(c) En intégrant l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{4}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t,$$

soit

$$\frac{1}{4(2n+4)} \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+4}\cdot$$

Par le théorème des gendarmes, on a

$$\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme

$$\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot$$

et on peut conclure que

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{4}\cdot}$$