Devoir surveillé 1

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Une copie double est obligatoire en première copie. Les suivantes peuvent être simples, en particulier pour les exercices courts.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice. **Le deuxième exercice sur une copie, s'il n'est pas corrigé, ne pourra pas faire l'objet de réclamations.**
- Mettre son nom sur chaque feuille.
- Numéroter chaque copie sous la forme [numéro de copie/ nombre total de copies].
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$-|x+3| + |2x+3| - 2|x-1| \leq -1.$$

Exercice 2. Déterminer en fonction des réels a et b, le nombre de solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a^2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & (b+1)y & & & = & 2a. \end{array}\right.$$

Exercice 3.

Exprimer sous forme réduite et factorisée :

$$S_n = \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ 1\leq i\leq j\leq k\leq n}} \max(i,j,k).$$

Exercice 4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner la forme réduite sans démonstration de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

2. Montrer que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit le symbole de Pochhammer de $x \in \mathbb{R}$ par
$$(x)_p = \prod_{k=0}^{p-1}(x+k).$$
On définit de plus
$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n}(k)_p.$$
   (a) Donner des formes factorisées de $S_p(n)$ pour $p \in \{1,2\}$.

   (b) Conjecturer une forme générale pour $S_p(n)$ et la démontrer.
   (On pourra fixer p et démontrer la propriété sur n.)

Exercice 5.

Soit $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$, tel que $0 \leq p \leq k < n$, on considère
$$S_1 = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{n-k} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{\ell=p}^{n}(-1)^{n-\ell}\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{p}.$$

1. Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, tel que $0 \leq b \leq c \leq a$, on a
$$\binom{a}{c}\binom{c}{b} = \binom{a}{b}\binom{a-b}{a-c}.$$

2. Ecrire sous formes réduites S_1 et S_2.

Exercice 6.

On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.

1. Justifier que
$$\forall t \in [0,1], \quad \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n.$$
2. En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n).
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$
4. Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
5. Montrer que
$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$
6. Déterminer la limite de la suite (nI_n).
7. Calculer I_1, puis en déduire I_3 et I_5.
8. On définit
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k+1}.$$
   (a) Montrer que
   $$S_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t,$$
   où g_n est une fonction dont on donnera l'expression réduite.
   (On pourra commencer par écrire sous forme réduite $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k+1}$*)*

   (b) Encadrer pour $t \in [0,1]$, $g_n(t)$ par des quantités dont l'intégrale se calcule facilement.

   (c) Montrer que
   $$\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   et en déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on explicitera.