Devoir surveillé 4

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Une copie double est obligatoire en première copie. Les suivantes peuvent être simples, en particulier pour les exercices courts.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice. **Le deuxième exercice sur une copie, s'il n'est pas corrigé, ne pourra pas faire l'objet de réclamations.**
- Mettre son nom sur chaque feuille.
- Numéroter chaque copie sous la forme [numéro de copie/ nombre total de copies].
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

1. Déterminer des équivalents les plus simples possibles des expressions suivantes aux points indiqués :
   (a) $\sqrt{\ln(x)} - 2\sqrt{\ln(x)+1} + \sqrt{\ln(x)+2}$ en $x = +\infty$.
   (b) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)^{x} - \cosh\left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$ en $x = +\infty$.
2. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie au voisinage de 0 pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par
$$f_{a,b}(x) = \frac{1+ax}{1+bx} - e^x.$$
   Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du couple (a,b), la fonction $f_{a,b}$ **« tend vers 0 le plus vite en 0 »** . (C'est-dire le premier terme non nul du développement limité de $f_{a,b}$ est d'ordre maximal). On donnera pour ce (ou ces couples) un équivalent de $f_{a,b}(x)$ en $x = 0$.

Exercice 2. On définit la fonction la fonction tangente hyperbolique notée th par $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. On définit la fonction f par $f(x) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quelques résultats sur la fonction th
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction th.
   (b) Calculer un développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction th.
2. Déterminer l'ensemble définition et étudier la parité de f.
3. Montrer que la dérivée de f peut se mettre sous la forme
$$f'(x) = \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \operatorname{th}(x) \leq x.$$
5. Etudier les variations de la fonction f.
6. Tracer la courbe de f.
7. Montrer que f admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
où les valeurs de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont à préciser. Justifier que ce développement reste valable en $x = -\infty$.
8. Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en $x = +\infty$, puis en $x = -\infty$.
9. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$, on considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak + b + 1}.$$

Preuve de la convergence.

1. Soient les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.
(On pourra commencer par montrer ques les suites (v_n) et (w_n) sont monotone et bornées)
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell(a, b)$.

Expression intégrale de la limite $\ell(a, b)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définie la fonction f_n sur $]0, 1]$ par
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{ak+b}.$$

3. Exprimer sous forme condensée $f_n(x)$.
4. Exprimer $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ de 2 manières et en déduire
$$u_n = \int_0^1 \frac{t^b}{1 + t^a}\mathrm{d}t + \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t,$$
où $g_n(t) = -t^b \frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}$,
puis que
$$\ell(a, b) = \int_0^1 \frac{t^b}{1 + t^a}\mathrm{d}t.$$

Calculs numériques :

6. Calculer les différentes valeurs de $\ell(a, b)$ pour $a \in [\![1, 2]\!]$ et $b \in [\![0, 1]\!]$.
7. Calculer $\ell(\frac{1}{3}, 0)$. *(On pourra poser un changement de variable.)*

Exercice 4. Soit a, b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle
$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$
admet une unique solution impaire.

Exercice 5.

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5 minutes plus tard, il reste 10g. Combien de temps faut-il encore attendre pour qu'il reste seulement 1g ? On donnera un valeur exacte puis une valeur approchée en minutes et secondes.

Table de valeurs numériques :

$$\boxed{\ln(2) \approx 0.693,\ \ln(3) \approx 1.099,\ \ln(5) \approx 1.609,\ \ln(7) \approx 1.946 \text{ à } 10^{-3}}$$

Exercice 6.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, pour $x \in G$, on appelle centralisateur de x, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x noté $C_G(x)$.
$$C_G(x) = \{y \in G\,;\, xy = yx\}\,.$$
   (a) Soit $x \in G$, montrer que $(C_G(x), \cdot)$ est sous-groupe de $(G, \cdot)$.
   (b) **Un exemple :** on considère G le groupe des similitudes directes du plan complexe muni de la loi de composition des applications :
$$G = \{z \mapsto az + b\,;\, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}\,.$$
      i. Soit $\beta \in \mathbb{C}^*$, déterminer $C_G(z \mapsto z + \beta)$.
      ii. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, déterminer $C_G(z \mapsto \alpha z)$.
      iii. Avec les hypothèses précédentes, montrer que $C_G(z \mapsto z + \beta)$ et $C_G(z \mapsto \alpha z)$ sont isomorphes à $(\mathbb{C}^*, \times)$ pour l'un et à $(\mathbb{C}, +)$ pour l'autre. On explicitera des isomorphismes de groupes pour le justifier.
2. Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $(S_G, \circ)$ le groupe des permutations de G (Les bijections de G dans G muni de la loi de composition).
On définit l'application φ de G dans $\mathcal{F}(G, G)$ par $\varphi(a) = (x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1})$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in G$, $\varphi(a)$ est un élément de S_G.
   (b) Démontrer que φ est un morphisme de groupes de $(G, \cdot)$ dans $(S_G, \circ)$.
   (c) Que dire de G, si $\operatorname{Ker} \varphi = G$?

Exercice 7. On considère
$$A = \left\{x \in \mathbb{Q}\,;\, x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ entier et } q \text{ entier impair}\right\}.$$
1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. (Lois usuelles)
2. Déterminer les inversibles de A.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n = \{y\,;\, y = 2^n x \text{ avec } x \in A\}$ est un idéal de A.
4. Soit I un idéal de A non réduit à 0, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = I_n$.