Devoir surveillé 3

Exercice 1.

Montrons le résultat par double implication :

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$

Supposons f bijective.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.

Montrons cette égalité par double inclusion.

$\boxed{\subset}$

Soit $y_0 \in f(E \setminus A)$. On a déjà $y_0 \in F$ par définition de f et il existe $x_0 \in E \setminus A$, tel que $y_0 = f(x_0)$.

Supposons $y_0 \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$, tel que $f(x_1) = y_0$. Donc $f(x_0) = f(x_1)$ avec $x_0 \neq x_1$, car A et $E \setminus A$ sont disjoints, or f est injective (car bijective). On a donc une contradiction, donc $y_0 \notin f(A)$. Il en résulte que $y_0 \in E \setminus f(A)$. On conclut $f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.

$\boxed{\supset}$

Soit $y_0 \in F \setminus f(A)$. Comme $y_0 \in F$ et f est bijective, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y_0$. Si $x_0 \in A$, alors $y_0 = f(x_0) \in f(A)$, ce qui est contradictoire car $y_0 \notin f(A)$, donc $x_0 \in E \setminus A$ et il en résulte $y_0 = f(x_0) \in f(E \setminus A)$. On a donc $F \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

Comme c'est vrai pour toute partie A, on conclut

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A).}$$

Montrons l'implication réciproque :

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$

Supposons $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A).}$ $(\star\star)$

Montrons que f est bijective.

On peut choisir $A = \emptyset$ et on obtient donc $f(E \setminus \emptyset) = F \setminus f(\emptyset)$, soit $f(E) = F$.

L'application f est donc surjective.

Pour l'injectivité, supposons $x, x' \in E$, tel que $f(x) = f(x')$.

Si $x \neq x'$, alors $x \in E \setminus \{x'\}$, on aura alors, grâce à l'hypothèse $(\star\star)$,

$$f(x) \in f(E \setminus \{x'\}) = F \setminus f(\{x'\}) = F \setminus \{f(x')\} = F \setminus \{f(x)\}.$$

Ce qui est contradictoire donc $x = x'$. On conclut f injective.

Comme f est injective et surjective, on conclut $\boxed{f \text{ bijective.}}$

Exercice 2.

1. Comme $f_0 = t \mapsto 1$, on en déduit
$$F_0(x) = \int_0^x 1 \mathrm{d}t = x.$$
Comme $f_1 = t \mapsto \frac{2}{e^t + e^{-t}}$ et $\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{1+e^{2t}} = 2\frac{(e^t)'}{1+(e^t)^2}$, on en déduit
$$F_1(x) = \int_0^x 2\frac{(e^t)'}{1+(e^t)^2} \mathrm{d}t = 2\left[\arctan(e^t)\right]_0^x = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

Comme $f_2 = t \mapsto \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$ et $\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4e^{2t}}{e^{4t}+2e^{2t}+1}$, on peut poser le changement de variable $y = e^{2t}$, soit $2e^{2t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ et on a (en modifiant correctement les bornes) :

$$F_1(x) = \int_0^x 4\frac{e^{2t}}{e^{4t}+2e^{2t}+1}\mathrm{d}t = 2\int_1^{e^{2x}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2y+1} = 2\int_1^{e^{2x}} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = 2\left[-\frac{1}{y+1}\right]_1^{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

On conclut

$$\boxed{F_0(x) = x, \quad F_1(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.}$$

2. On conclut directement en utilisant la question précédente que

$$\boxed{F_0 \text{ n'a pas de limite finie en } +\infty \text{ et } F_1 \text{ a pour limite } u_1 = \frac{\pi}{2} \text{ en } +\infty.}$$

Pour F_2, on a, par les équivalents usuels,

$$F_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1.$$

On conclut donc que

$$\boxed{F_2 \text{ a pour limite } u_2 = 1 \text{ en } +\infty.}$$

3. En utilisant l'indication, on calcule

$$F_n(x) - F_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{(\mathrm{ch}\,(t))^{n+2}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{(\mathrm{ch}\,(t))^{n+2}}\mathrm{d}t.$$

Comme les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire l'intégration par parties suivante

$$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = \frac{\mathrm{sh}\,(t)}{(\mathrm{ch}\,(t))^{n+2}} & u(t) = -\frac{1}{(n+1)(\mathrm{ch}\,(t))^{n+1}} \\ v(t) = \mathrm{sh}\,(t) & v'(t) = \mathrm{ch}\,(t) \end{array}\right.$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_{n+2}(x) &= \left[-\frac{1}{(n+1)(\mathrm{ch}\,(t))^{n+1}}\mathrm{sh}\,(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{(n+1)(\mathrm{ch}\,(t))^{n+1}}\mathrm{ch}\,(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{(n+1)(\mathrm{ch}\,(x))^{n+1}} + \frac{1}{n+1}F_n(x) \end{aligned}$$

En manipulant les 2 membres, on conclut donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{\mathrm{sh}\,x}{(n+1)\,(\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}.}$$

4. Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \qquad F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

Initialisation :
Pour $n = 1$, le résultat a été démontré à la question 2.
Hérédité :
Soit $n \geq 1$ fixé, tel que

$$F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

On a grâce à la question 3,

$$F_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{\mathrm{sh}\,x}{(n+1)\,(\mathrm{ch}\,x)^{n+1}}.$$

Comme $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$, on a

$$\frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\,(\operatorname{ch} x)^{n+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{e^x}{2}}{(n+1)\left(\dfrac{e^x}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2^n}{(n+1)e^{nx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\text{car } n>0)$$

Comme F_n admet une limite finie u_n en $+\infty$, on en déduit F_{n+2} admet une limite finie $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$. On conclut donc

$$F_{n+1} \text{ et } F_{n+2} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout n.
On conclut donc que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad F_n \text{ admet une limite finie } u_n \text{ en } +\infty \text{ et la suite } (u_k)_{k\geq 1} \text{ vérifie } u_1 = \tfrac{\pi}{2},\ u_2 = 1 \text{ et } \quad \forall k \geq 1, \quad u_{k+2} = \frac{k}{k+1}u_k}$$

5. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de F_n calculons un développement limité d'ordre 4 de sa dérivée, on a par les développements limités usuels, comme l'entier n est fixé,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(t) &= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \underset{t\to 0}{o}(t^4)\\
(1+u)^{-n} &= 1 - nu + \frac{n(n+1)}{2}u^2 + \underset{t\to 0}{o}(u^2)
\end{aligned}$$

En composant ($u = \operatorname{ch}(t) - 1 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \underset{t\to 0}{o}(t^4)$), on a donc

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^n} = 1 - n\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)^2 + \underset{t\to 0}{o}(u^2) + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

Comme $\operatorname{ch}(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on en déduit

$$\frac{1}{(\operatorname{ch}(t))^n} = 1 - \frac{n}{2}t^2 + \left(-\frac{n}{24} + \frac{n(n+1)}{8}\right)t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

soit

$$f_n(t) = 1 - \frac{n}{2}t^2 + \frac{n(n-2)}{8}t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4).$$

Comme $F_n(0) = 0$, on en déduit par primitivation des développements limités

$$\boxed{F_n(x) = x - \tfrac{n}{6}x^3 + \tfrac{n(n-2)}{40}x^5 + \underset{t\to 0}{o}(x^5).}$$

Exercice 3.

1. Déterminer des équivalents les plus simples possibles au point indiqué

   (i) On a $\dfrac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} - 1 = \dfrac{\sin(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$. Or on a :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ \text{d'où } \sin(x) - \operatorname{sh}(x) &= -\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

   On en déduit $\sin(x) - \operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^3}{3}$. Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ on conclut

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{3}.}$$

   (ii) On a

$$e^{\sqrt{3+x}} - e^{2x^2} = e^{2x^2}\left(e^{\sqrt{3+x}-2x^2} - 1\right).$$

   Comme $\lim\limits_{x\to 1} e^{2x^2} = e^2$ et $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3+x} - 2x^2 = 0$, on a donc, grâce aux équivalents usuels

$$e^{\sqrt{3+x}} - e^{2x^2} \underset{x\to 1}{\sim} e^2\left(\sqrt{3+x} - 2x^2\right).$$

   Effectuons le changement de variable $x = 1+h$, on a alors $\sqrt{3+x} - 2x^2 = \sqrt{4+h} - 2 - 4h + h^2$. Par les développements limités usuels, on a $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u)$. On en déduit, par composition,

$$\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} = 2\left(1 + \frac{h}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h)\right),$$

   puis

$$\sqrt{4+h} - 2 - 4h + h^2 = -\frac{15}{4}h + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

   On en déduit

$$\sqrt{3+x} - 2x^2 \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{15}{4}(x-1),$$

   d'où

$$\boxed{e^{\sqrt{3+x}} - e^{2x^2} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{15}{4}e^2(x-1).}$$

   (iii) On a

$$x^{\left(x^x - 1\right)} - 1 = e^{\ln(x)\left(x^x - 1\right)} - 1.$$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $x^x - 1 = e^{x\ln(x)} - 1$, on a donc $\ln(x)(x^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)^2$. Puis comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)^2 = 0$, on a donc

$$\boxed{x^{\left(x^x - 1\right)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)^2.}$$

2. (a) On a par les équivalents usuels

$$\begin{aligned} \sqrt{x^6+x^5+1} &\underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \\ \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

   On conclut que

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2 := h(x)}$$

(b) On a un équivalent polynomial de degré 2, il nous faut donc 2 termes de plus (degré 1 et 0) pour conclure.

On a

$$g(x) = -x^3\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Il faut donc déterminer un développement à 3 termes de $\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^6}}$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ et on a, par les développements limités usuels,

$$\begin{array}{rcl} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^6} & = & 1+\dfrac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2}) \\ \sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2})} & = & 1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2}) \\ \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) & = & -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^3}) \end{array}$$

Il en résulte

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2})\right)\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^3})\right) \\ & = & x^2\left(1+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2})\right)\left(-1-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x^2})\right) \\ & = & x^2\left(-1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{11}{24x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -x^2-x-\dfrac{11}{24}+\underset{x\to+\infty}{o}(1) \end{array}$$

On conclut donc

$$g(x) = h(x) - x - \frac{11}{24} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$$

On a donc une droite asymptote à la courbe de $g-h$ d'équation $y = -x - \frac{11}{24}$ et que la courbe de g est en dessous de celle de h ($(g-h)(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$).

Exercice 4.

1. On calcule directement

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^0}\mathrm{d}x & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x & = & \displaystyle\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = [x-\ln(1+x)]_0^1 = 1-\ln 2 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x & = & \displaystyle\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2. \end{array}$$

On conclut

$$\boxed{u_0 = \tfrac{1}{4},\ u_1 = 1-\ln 2 \text{ et } u_2 = \tfrac{1}{2}\ln 2.}$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale et sa positivité, on a

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}}_{\geq 0}\mathrm{d}x \geq 0.$$

On conclut que

$$\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante.}}$$

3. On a $\frac{x}{x^n+1} = \frac{x(x^n+1)-x^{n+1}}{x^n+1} = x - \frac{x^{n+1}}{x^n+1}$ et $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Il en résulte

$$u_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

Pour $x \in [0,1]$, on a $\left|\frac{x^{n+1}}{1+x^n}\right| \leq x^{n+1}$ et on en déduit donc

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^n}\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}.}$$

4. Modifions la première intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^2}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}\,x\cdot$$

On peut alors effectuer l'intégration par parties$\begin{cases} u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} & u(x) = \ln(1+x^n) \\ v(x) = \frac{x^2}{n} & v'(x) = \frac{2x}{n} \end{cases}$ Et on a alors

$$\int_0^1 \frac{x^2}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^2}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{2}{n}\int_0^1 x\ln(1+x^n)\mathrm{d}x.$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n}\int_0^1 x\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.}$$

5. En utilisant la majoration "usuelle" $\ln(1+t) \leq t$, on a

$$\left|\int_0^1 x\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |x\ln(1+x^n)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut bien

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

6. On a calculer précédemment que

$$u_n - \frac{1}{2} = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

En utilisant, la question 4, on obtient

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^1 x\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

D'où

$$n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -\ln 2 + 2\int_0^1 x\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Grâce à la question 5, on conclut donc que

$$\boxed{\lim_n n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -\ln 2.}$$

Exercice 5. [Quelques équations différentielles]

1. Résolvons d'abord l'équation homogène
$$(t^2+t)y'(t)+y(t)=0 \quad (E_h).$$
Comme la fonction $t\mapsto t^2+t$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut directement calculer une primitive de $t\mapsto \frac{1}{t^2+t}$. On a
$$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}.$$
La fonction $t\mapsto \ln t-\ln(t+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $t\mapsto\frac{1}{t^2+t}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_h) est
$$\mathcal{S}_h=\left\{t\mapsto \lambda e^{-}\left(\ln t-\ln(t+1)\right)=\lambda\frac{t+1}{t}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$
Appliquons la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière, on pose $y(t)=\lambda(t)\frac{t+1}{t}$ et on a alors $y'(t)=\lambda'(t)\frac{t+1}{t}-\lambda(t)\frac{1}{t^2}$, soit
$$(t^2+t)y'(t)+y(t)=(t+1)^2\lambda'(t)=\ln(t+1).$$
Il faut donc déterminer une primitive de $t\mapsto\frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$.
En effectuant l'intégration par parties$\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{(t+1)^2} & u(t)=-\frac{1}{t+1}\\ v(t)=\ln(t+1) & v'(t)=\frac{1}{1+t}\end{cases}$, on obtient
$$\int_0^x\frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right]_0^x+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{1}{1+x}+1$$
Il en résulte que $t\mapsto-\frac{\ln(t+1)}{t+1}-\frac{1}{1+t}$ est une primitive de $t\mapsto\frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$.
Sans oublier de remultiplier, on conclut que l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{t\mapsto-\frac{\ln(1+t)}{t}-\frac{1}{t}+\lambda\frac{t+1}{t}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. Considérons l'équation différentielle homogène associée
$$y''-6y'+5y=0.$$
L'équation caractéristique $x^2-6x+5=0$ a deux racines simples 1 et 5, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc
$$\left\{t\mapsto\lambda_1e^t+\lambda_2e^{5t}\ ;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\right\}.$$
Comme $\operatorname{ch}(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, on cherche des solutions particulières pour
$$y''-6y'+5y=e^t\quad(E_1)\quad\text{et}\quad y''-6y'+5y=e^{-t}\quad(E_2).$$
Pour (E_1), comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $t\mapsto\gamma te^t$ et on a alors
$$\begin{array}{rcl} y(t)&=&\gamma te^t\\ y'(t)&=&(\gamma t+\gamma)e^t\\ y''(t)&=&(\gamma t+2\gamma)e^t\\ y''(t)-6y'(t)+5y(t)&=-&4\gamma e^t=e^t\end{array}$$
On trouve donc $\gamma=-\frac{1}{4}$ et $t\mapsto-\frac{t}{4}e^t$ solution particulière de (E_1). Pour (E_2), comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $t\mapsto\delta e^{-t}$ et on a alors
$$\begin{array}{rcl} y(t)&=&\delta e^{-t}\\ y'(t)&=&-\delta e^{-t}\\ y''(t)&=&\delta e^{-t}\\ y''(t)-6y'(t)+5y(t)&=&12\delta e^{-t}=e^{-t}\end{array}$$

On trouve donc $\delta = \frac{1}{12}$ et $t \mapsto \frac{1}{12}e^{-t}$ solution particulière de (E_2). Par superposition, on trouve que les solutions de l'équation initiale sans les conditions initiales sont

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \frac{e^{-t}}{24} - \frac{t}{8}e^t + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{5t} \, ; \, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = \frac{1}{24}$, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}.$$

Puis en dérivant, on a

$$y'(t) = -\frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{8}e^t + \frac{t}{8}e^t + \lambda_1 e^t + 5\lambda_2 e^{5t}.$$

D'où, $y'(0) = -\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 1$. En regroupant, on obtient le système $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = \frac{7}{6} \end{array} \right.$ On résout et on obtient $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\frac{7}{24}$ et on conclut que la solution au problème de Cauchy initial est

$$\boxed{t \mapsto \frac{e^{-t}}{24} - \frac{t}{8}e^t + \frac{7}{24}\left(e^{5t} - e^t\right)}$$

3. (a) On remarque que $f'(x) = f(\pi - x)$ permet de dire que f' est dérivable car composée de fonction dérivable et on a

$$f''(x) = -f'(\pi - x).$$

Puis, comme on a $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(\pi - x)$. Il résulte $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(\pi - x) = f(x)$. D'où

$$f''(x) = -f(x).$$

On conclut que si la fonction f est solution du problème, alors $\boxed{f'' + f = 0.}$

(b) L'équation différentielle précédente est linéaire homogène d'équation caractéristique $x^2 + 1 = 0$, on trouve directement l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \ ; \ A, B \in \mathbb{R}\}.}$$

(c) Il faut faire la synthèse, si la fonction f est solution, on a montré que son expression est $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. On a alors, en utilisant les relations du cercle trigonométrique,

$$f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) = f(\pi - x) = A\cos(\pi - x) + B\sin(\pi - x).$$

Il faut donc que pour tout réel x,

$$-A\sin(x) + B\cos(x) = -A\cos(x) + B\sin(x),$$

d'où pour tout réel x,

$$(A + B)\cos(x) = (A + B)\sin(x).$$

En spécialisant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $A + B = 0$ comme condition nécessaire, soir $B = -A$. Réciproquement, si $f(x) = A\cos(x) - A\sin(x)$, on a alors, de nouveau en utilisant les relations du cercle trigonométrique,

$$f'(x) = -A\sin(x) - A\cos(x) = -A\sin(\pi - x) + A\cos(\pi - x) = f(\pi - x).$$

On conclut que l'ensemble des solutions du problème initial est

$$\boxed{\mathcal{S}_{initial} = \{x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) \, ; \, A \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \mapsto \lambda \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \, ; \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Exercice 6. $\star\star$