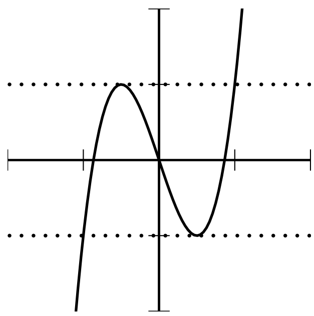
Devoir surveillé 2

Exercice 1.

1. Etudions la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^3 - 3x$. Comme elle est impaire, on étudie sur $\mathbb{R}^+$. On dérive et on obtient $u'(x) = 3(4x^2 - 1)$, soit le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$u(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite, on a $4x^3 - 3x = x^3 \left(4 - \dfrac{3}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On remarque de plus que $u(1) = 1$. On trace la courbe sur [0,1] et on complète par symétrie.



Comme arccos est définie sur $[-1, 1]$, le tableau de variations de u nous permet de conclure, par les règles de composition usuelles.

$$\boxed{f \text{ est définie sur [-1,1].}}$$

2. L'image de $[-1, 1]$ par arccos est $[0, \pi]$, donc $f(x) \in [0, \pi]$ et $\pi - f(-x) \in [0, \pi]$. On est donc sur un intervalle sur lequel cos définie une bijection. Il suffit de montrer que $\cos(f(x)) = \cos(\pi - f(-x))$.
Or on a $\cos(f(x)) = \cos(\arccos(4x^3 - 4x)) = 4x^3 - 4x$ et par les relations du cercle trigonométrique,

$$\cos(\pi - f(-x)) = -\cos(f(-x)) = -\arccos(-4x^3 + 4x)) = 4x^3 - 4x.$$

On conclut que

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad f(-x) = \pi - f(x).}$$

Remarque : On peut utiliser la dérivation pour démontrer cette formule, mais il faut alors vérifier soigneusement le domaine de dérivabilité et recoller les points de non dérivabilité par continuité.

3. Linéarisons $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$, par les formulaires d'Euler et le binôme de Newton, on a

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{3ix}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}.$$

Il en résulte que

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \cos(3x).$$

On calcule alors

$$f(\cos(\theta)) = \arccos(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)) = \arccos(\cos(3\theta)).$$

On conclut

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(\theta)).}$$

4. Si $3\theta \in [0, \pi]$ (soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$), la définition de arccos donne $\arccos(\cos(3\theta)) = 3\theta$, d'où $f(\cos(\theta)) = 3\theta$.
   Puis par les relations du cercle trigonométrique, si $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, alors $3\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, d'où $2\pi - 3\theta - \pi \in [\frac{\pi}{2} \subset [0, \pi]$ et $\cos(3\theta) = \cos(2\pi - 3\theta)$.
   Donc $\arccos(\cos(3\theta)) = \arccos(\cos(2\pi - 3\theta)) = 2\pi - 3\theta$.
   On conclut

$$\boxed{f(\cos(\theta)) = \left\{ \begin{array}{cc} 3\theta & \theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ 2\pi - 3\theta & \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right. .}$$

   On remarque que la fonction $\theta \mapsto f(\cos(\theta))$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{3}$. (Cf. expression,"changement de pente brutal") Cela impose la non dérivabilité de f en $\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$. (Sinon par composition $\theta \mapsto f(\cos(\theta))$ serait dérivable en $\frac{\pi}{3}$.)

5. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, donc par les règles usuelles de dérivation f est dérivable en x si $u(x) \neq \pm 1$. L'étude de la question 1 nous permet de dire que

$$\boxed{f \text{ est dérivable par les règles usuelles en } x \in [0, 1], \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \text{ et } x \neq 1.}$$

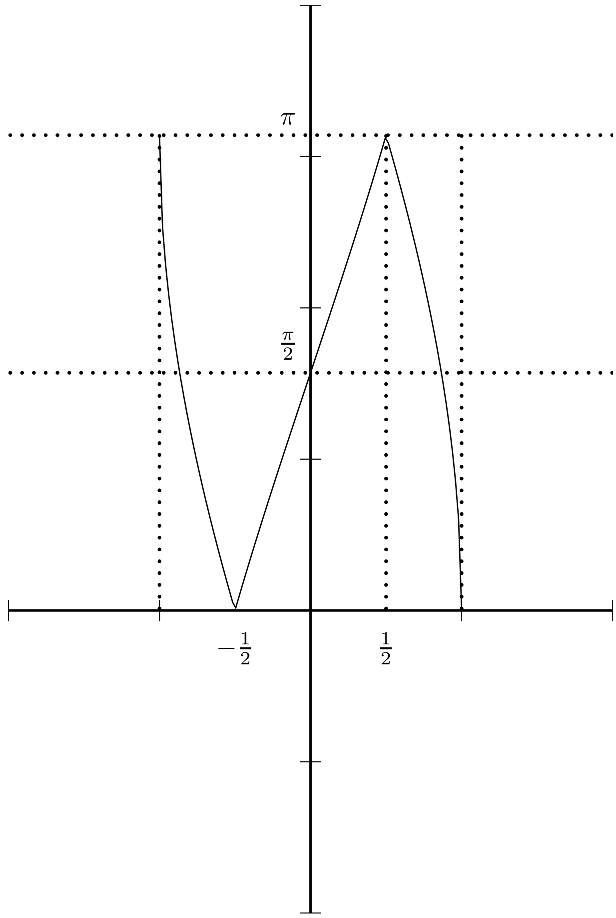
6. On calcule la dérivée de f par les règles usuelles et on a

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3(4x^2 - 1)}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2)}}.}$$

7. La continuité de f et sa dérivée nous donnent directement

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

   On trace la courbe de f sur $[0, 1]$, puis on complète par symétrie grâce à la question 2.



Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

1. Soit on remarque que la fonction f_n est strictement croissante comme somme et composée de fonctions strictement croissantes, soit on dérive et on obtient

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2x^2} > 0.$$

Ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant (aucune indétermination sur les limites aux bornes) :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n(x)$	$-n\frac{\pi}{2}$	$n\frac{\pi}{2}$

,

Comme la fonction f_n est strictement croissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et grâce au tableau de variations, on en déduit $f(\mathbb{R}) =]-n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}[$ et le théorème de la bijection permet donc de conclure

$$\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ a une unique solution.}}$$

2. Pour x_1, on a directement $\arctan(x_1) = \frac{\pi}{4}$ soit $x_1 = 1$.
Pour x_2, on a $\arctan(x_2) + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4}$, en utilisant formulaire trigonométrique($\tan(a+b) = ...$, on a

$$\frac{3x_2}{1-2x_2^2} = 1.$$

D'où $2x_2^2 + 3x_2 - 1 = 0$. On obtient de $x_2 = \frac{-3\pm\sqrt{11}}{4}$. Il exist une unique solution grâce à la question 1 et comme $f_2(0) = 0$, par croissance de f_2, $x_2 > 0$ et on conclut donc

$$\boxed{x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{11}}{4}.}$$

3. On remarque que

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \arctan((n+1)x_n) = \frac{\pi}{4} + \arctan((n+1)x_n).$$

Comme $f_n(0) = 0$ et f_n croissante, on a $x_n > 0$. Il en résulte que $f_{n+1}(x_n) \geq \frac{\pi}{4}$. On conclut donc

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante minorée par 0, donc elle converge vers une limite } \ell.}$$

4. Supposons que $\ell > 0$ (la limite de (x_n) est positive car 0 minore (x_n)), on a alors

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(kx_n) \geq \arctan(nx_n).$$

Par composition des limites, comme $\ell > 0$, on a $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\arctan(nx_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\cdot$ Soit par passage à la limite dans l'inégalité, $\frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}$. Ce qui est contradictoire, on conclut

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge } 0.}$$

5. On définit la suite (u_n) par $u_n = n^2 x_n$.
   (a) Définissons sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions u et v par

$$u(t) = \arctan(t) - t + \frac{t^3}{3}$$

et

$$v(t) = t - \arctan(t).$$

Par les règles usuelles de dérivation, on a

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 + t^2 = \frac{t^4}{1+t^2}$$

et

$$v'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Comme les dérivées sont positives, on en déduit les variations suivantes

t	0	$+\infty$
$u(t)$	0	$\nearrow$
$v(t)$	0	$\nearrow$

,

Il en résulte que, pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq u(t) = \arctan(t) - t + \frac{t^3}{3}$$

et

$$0 \leq v(t) = t - \arctan(t).$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan(t) \leq t.}$$

(b) Par définition de x_n, on a

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n).$$

En utilisant l'inégalité de la question précédente et les sommes usuelles, on a

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n) \leq \sum_{k=1}^{n} kx_n = x_n \sum_{k=1}^{n} k = x_n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Puis

$$x_n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) n^2 x_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) u_n.$$

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{4} \leq \frac{n(n+1)}{2} x_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) u_n.}$$

(c) En utilisant à nouveau la question 5.(a), on a

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2k}{n^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} - \frac{8k^3}{3n^6}.$$

Soit

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Les sommes usuelles nous donnent

$$\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{3n^6}\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq \frac{(n+1)}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}.}$$

(d) Grâce à la question précédente, on a

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4} = \frac{3n^3 - 2(n+1)^2}{3n^4} = \frac{3n^3 - 2n^2 - 4n - 2}{3n^4} = \underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{3 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} - 2\frac{1}{n^3}}{3}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ suffisamment grand, on a } f_n\left(\tfrac{2}{n^2}\right) \geq 1.}$$

Comme f_n croissante, pour n suffisamment grand, $f_n(x_n) = \frac{\pi}{4} < 1 \leq f_n(\frac{2}{n^2})$, il en résulte donc que

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ suffisamment grand, on a } x_n \leq \tfrac{2}{n^2}.}$$

(e) On a, en utilisant la question 5.(a),

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n) \geq \sum_{k=1}^{n} kx_n - \frac{1}{3}(kx_n)^3.$$

Il en résulte

$$\sum_{k=1}^{n} kx_n \leq \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(kx_n)^3.$$

On a donc, grâce aux sommes usuelles,

$$\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} x_n^3 \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Comme pour n suffisamment grand, on a $x_n \leq \frac{2}{n^2}$, on en déduit que pour n suffisamment grand

$$\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^2}\right)^3 \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Après simplification, on conclut bien que

$$\boxed{\text{pour } n \text{ suffisamment grand, on a } \tfrac{n(n+1)}{2}x_n \leq \tfrac{\pi}{4} + 2\tfrac{(n+1)^2}{3n^4}\cdot}$$

(f) Grâce à la question 5.(b), on a

$$\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq u_n$$

Grâce à la question 5.(e), on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n = \frac{n(n+1)}{2}x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\frac{(n+1)^2}{n^4}\cdot$$

Il en résulte, pour n suffisamment grand,

$$\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq u_n \leq \frac{2}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\frac{(n+1)^2}{n^4}\right)\cdot$$

Comme $\frac{(n+1)^2}{n^4} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème des gendarmes, on conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \tfrac{\pi}{2}\cdot}$$

Exercice 3.

Supposons $z_1 = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant les hypothèse (ii) et (iii), on a donc

$$z_2 = 2re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{et} \quad z_3 = 4re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On en déduit, en utilisant la condition (i) que

$$z_1z_2z_3 = 8r^3e^{i\left(3\theta+\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}(-1+i).$$

Soit, en mettant sous forme exponentielle le second membre,

$$8r^3e^{i\left(3\theta+\frac{3\pi}{4}\right)} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

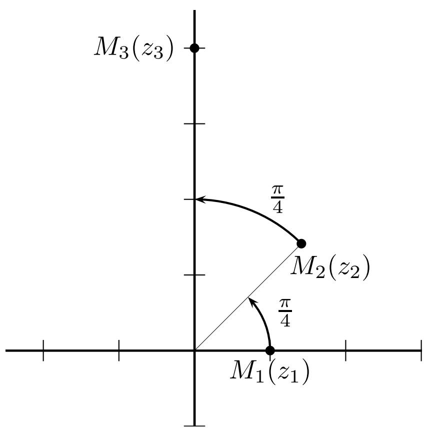
Par identification module et argument, on a donc

$$r^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\theta + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

On a donc $r = 1$ et $\theta \equiv 0[\frac{2}{3}\pi]$. On a donc $z_1 = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ avec $k \in [\![0,2]\!]$, on a donc ensuite $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}z_1$ et $z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}z_1 = 4i$. On conclut

$$\boxed{z_1 = e^{\frac{2ik\pi}{3}},\ z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ et } z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4ie^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ avec } k \in [\![0,2]\!].}$$

Seul le cas $k = 0$ vérifie $\arg z_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on trace alors



Exercice 4.

1. On calcule dans un premier temps, pour $x \not\equiv 0[2\pi]$ (pour avoir $e^{ix} \neq 1$), les sommes géométriques et la formuel de l'angle moitié

$$\sum_{k=0} ne^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

On en déduit, par identification partie réelle et partie imaginaire que, pour $x \not\equiv 0[2\pi]$

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On traite à part, le cas part, le cas $x \equiv 0[2\pi]$ et on conclut

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

et

$$S_n(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \\ 0 & \text{si } x \equiv 0[2\pi]. \end{cases}$$

2. Les formes réduites de la question précédente nous donne directement que les solutions x vérifieront nécessairement $x \not\equiv 0[2\pi]$.

Si x solution, on a donc

$$\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Il y a donc 2 cas :

- **Premier cas :** $\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) = 0$

  Il en résulte $\frac{n+1}{2}x \equiv 0[\pi]$. On a donc $x = \frac{2k}{n+1}\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \not\equiv 0[n+1]$ (pour ne pas être dans le cas $x \equiv 0[2\pi]$).
- **Deuxième cas :** $\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

  En utilisant le cercle trigonométrique, on a donc $\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}x\right)$

  On a donc $\frac{n}{2}x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}x[2\pi]$ ou $\frac{n}{2}x \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{n}{2}x[2\pi]$.

  Le deuxième cas est impossible, on a donc $\frac{n}{2}x \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}x[2\pi]$, soit $x \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{2\pi}{n}]$. Pas de cas à exclure, car on ne peut pas avoir $x \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{2\pi}{n}]$ et $x \not\equiv 0[2\pi]$.

  On conclut que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{n+1} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \not\equiv 0[n+1]\right\}.}$$

Exercice 5.

1. Soit α un racine de P, on a donc $(1+\alpha)^n = \alpha^n$.

On remarque qu'on a nécessairement $\alpha \neq 0$, on peut donc diviser et on a

$$\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n = 1.$$

Il en résulte que $\frac{1+\alpha}{\alpha} \in \mathbb{U}_n$. Il existe donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

On a donc $(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})\alpha = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. On remarque que $k=0$ n'est pas possible ($0\alpha = 1$....).
On doit donc supposer $k \in [\![1, n-1]\!]$ et alors, comme. $1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$, on a

$$\alpha = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Comme on peut remonter toutes le manipulations, on trouve $n-1$ racines pour P.

$$\boxed{\frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{pour} \quad k \in [\![1, n-1]\!].}$$

2. En développant le polynôme P, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k.$$

On a donc un polynôme de degré $n-1$ et la question précédente nous donne exactement $n-1$ racines.
On peut donc appliquer le résultat admis par l'énoncé :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Soit

$$\frac{i^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Par les propriétés de l'exponentielle, on a

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = e^{\sum_{k=1}^{n-1} -i\frac{k\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}} = e^{-i(n-1)\frac{\pi}{2}} = i^{n-1}.$$

Il en résulte

$$\frac{i^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{i^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Donc

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (-1)^{n-1}\frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

On conclut

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$