Devoir surveillé 2

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Une copie double est obligatoire en première copie. Les suivantes peuvent être simples, en particulier pour les exercices courts.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice. **Le deuxième exercice sur une copie, s'il n'est pas corrigé, ne pourra pas faire l'objet de réclamations.**
- Mettre son nom sur chaque feuille.
- Numéroter chaque copie sous la forme [numéro de copie/ nombre total de copies].
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(4x^3 - 3x).$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $[-1, 1]$.
2. Justifier que $\forall x \in [-1, 1], \quad f(-x) = \pi - f(x)$.
3. Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(3\theta))$.
4. Simplifier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, l'expression de $f(\cos(\theta))$. On en déduira un point de non dérivabilité de f.
5. Déterminer en quelles valeurs de $[0, 1]$, la fonction f est dérivable par les règles usuelles de composition.
6. Calculer la dérivée de f.
7. Etudier les variations de f sur [0,1] et tracer sa courbe sur [-1,1].

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx)$$

et on considère l'équation (E_n)

$$f_n(x) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que (E_n) admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Déterminer x_1 et x_2.
3. En considérant $f_{n+1}(x_n)$ montrer que la suite (x_n) est monotone et converge vers une limite ℓ.
4. Supposer que $\ell > 0$ et arriver à une contradiction. Conclure sur la valeur de ℓ.
5. On définit la suite (u_n) par $u_n = n^2 x_n$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan(t) \leq t$.
   (b) Montrer que pour tout n,
   $$\frac{\pi}{4} \leq \frac{n(n+1)}{2} x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n.$$
   (c) Montrer que
   $$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq \frac{(n+1)}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}.$$
   (d) Montrer que pour n suffisamment grand, on a
   $$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq 1.$$
   En déduire que pour n suffisamment grand, on a $x_n \leq \frac{2}{n^2}$.
   (e) Montrer que pour n suffisamment grand, on a
   $$\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}.$$
   (f) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 3. Soient 3 nombres complexes z_1, z_2, z_3, on suppose que

(i) Leur produit est égal à $4\sqrt{2}(-1+i)$.

(ii) Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2.

(iii) Leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer z_1, z_2 et z_3 solutions. Pour le (ou les cas), où $\arg z_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on représenter, dans un repère orthonormée direct, les points du plan dont ce sont les affixes .

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit, sur $\mathbb{R}$, les fonctions C_n et S_n par

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

et

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

1. Déterminer des formes réduites de $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
2. Résoudre $C_n(x) = S_n(x)$.

Exercice 5.

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'indéterminée X un objet de la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{C}^{n+1}$. On dit que P est de degré n, si $a_n \neq 0$.

On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P, si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$.

Résultat admis :

Si le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré n et possède n racines distinctes $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, alors

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, déterminer les racines de $P = (1+X)^n - X^n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, déterminer une forme réduite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.