Devoir Surveillé 1 Corrigé

Exercice 1.

En pivotant, on a

$$\begin{cases} -x & + & (1+\lambda)y & = & -4-\mu \\ 2x & - & \lambda y & = & 9+\mu \end{cases} \iff \begin{cases} -x & + & (1+\lambda)y & = & -4-\mu \\ & & (2+\lambda)y & = & 1-\mu \end{cases}$$

Discutons :

1. Si $\lambda \neq -2$, on a un brave système triangulaire, qui possède pour une unique solution :

$$\begin{cases} x & = & (1+\lambda)y+4+\mu = \cdots = \frac{9+5\lambda+\mu}{2+\lambda} \\ y & = & \frac{1-\mu}{2+\lambda} \end{cases}$$

2. Si $\lambda = -2$: la seconde équation est : $0 = 1-\mu$. Ainsi :
   — Si $\mu \neq 1$, alors le système ne possède pas de solution.
   — Si $\mu = -1$, le système est équivalent à la simple équation $-x-y=-5$. Il possède donc une infinité de solution :
$$S = \{(5-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.

1. En reformulant la somme, on a

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i \quad (j \text{ est indépendant de } i.) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} \quad (\text{formule usuelle}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

On conclut donc $\boxed{A_n = \frac{n(n+3)}{4}}$. On remarque que les entiers n et $n+3$ sont de parité différentes, donc le produit $n(n+3)$ est un entier pair. Il en résulte que $2n(n+3)$ est toujours divisible par 4, $2A_n$ est un nombre entier pour tout n. Puis $A_2 = \frac{5}{2}$, donc l'entier $q=1$ ne convient pas, on conclut donc

$$\boxed{q = 2 \text{ est le plus petit entier strictement positif tel que } qA_n \text{ est un nombre entier pour tout entier } n.}$$

2. On réécrit la somme

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a^{2i}a^{-j}.$$

D'où,

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j} = \left(\sum_{i=0}^{n} a^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a^{-j}\right).$$

On a donc le produit de deux sommes géométriques de raison respectivement a^2 et a^{-1}. Les cas où les raisons sont égales à 1 sont à traiter à part, soit les cas $a = 1$ et $a = -1$.

Dans le cas où $a = 1$, on a

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j} = (n+1)^2$$

.

Dans le cas où $a = -1$, on a

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j} = (n+1)\frac{1-(-1)^{-(n+1)}}{1-(-1)^{-1}} = (n+1)\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}.$$

Dans les autres cas ($a \notin \{-1;1\}$), on a

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j} = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}\cdot\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

3. Effectuons les 2 calculs.
Première manière :

$$\int_0^x (1+t)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}(1+t)^{n+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Seconde manière :
En utilisant le binôme de Newton, on a

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k,$$

d'où

$$\int_0^x (1+t)^n \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^x t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

En évaluant les deux expressions en $x = 1$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

En évaluant les deux expressions en $x = -1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = -\frac{1}{n+1}.$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 3.

On cherche à résoudre

$$2\left|x^2-3x\right|-|x-2|-1\leq 0.$$

On rappelle qu'un trinôme du second degré ax^2+bx+c est du signe opposé à celui a si x est entre les 2 racines réelles (si elles existent) de $az^2+bz+c=0$ et du même signe sinon.

On remarque que x^2-3x change de signe en $x=0$ et $x=3$ et $x-2$ en $x=2$.

On en déduit

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$\left\|x^2-3x\right\|$	x^2-3x	$-x^2+3x$	$-x^2+3x$	x^2-3x	
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$	
$2\left\|x^2-3x\right\|-\|x-2\|-1$	$2x^2-5x-3$	$-2x^2+7x-3$	$-2x^2+5x+1$	$2x^2-7x+1$	

On discute selon les cas :

- Si $x\leq 0$, les racine de $2x^2-5x-3$ sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Comme le coefficient dominant (a) est positif, $x\in[-\frac{1}{2},0]$. On trouve donc
$$\mathcal{S}_1=[-\frac{1}{2},0].$$
- Si $0\leq x\leq 2$, les racine de $-2x^2+7x-3$ sont $\frac{1}{2}$ et 3. Comme le coefficient dominant (a) est négatif, il faut $x\in]-\infty,\frac{1}{2}]\cup[3,+\infty[$. On trouve donc
$$\mathcal{S}_2=[0,\frac{1}{2}].$$
- Si $2\leq x\leq 3$, les racine de $-2x^2+5x+1$ sont $\frac{5-\sqrt{33}}{4}$ et $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$. Comme le coefficient dominant (a) est négatif, $x\in]-\infty,\frac{5-\sqrt{33}}{4}]\cup[\frac{5+\sqrt{33}}{4},+\infty[$. Comme $\frac{5-\sqrt{33}}{4}<0$ et $2\leq\frac{5+\sqrt{33}}{4}\leq 3$ (car $5<\sqrt{33}<6$) On trouve donc
$$\mathcal{S}_3=[\frac{5+\sqrt{33}}{4},3].$$
- Si $3\leq x$, les racine de $2x^2-7x+1$ sont $\frac{7-\sqrt{41}}{4}$ et $\frac{7+\sqrt{41}}{4}$. Comme le coefficient dominant (a) est positif, il faut donc $x\in[\frac{7-\sqrt{41}}{4},\frac{7+\sqrt{41}}{4}]$. Comme $\frac{7-\sqrt{41}}{4}<3$ et $3<\frac{7+\sqrt{41}}{4}$ (car $6<\sqrt{41}<7$), on trouve donc
$$\mathcal{S}_4=[3,\frac{7+\sqrt{41}}{4}].$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\mathcal{S}_3\cup\mathcal{S}_4=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{33}}{4},\frac{7+\sqrt{41}}{4}\right]}.$$

Exercice 4.

1. En utilisant le binôme de Newton, on a
$$(3+2\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\sqrt{2})^k3^{n-k}.$$
En séparant les termes pairs et impairs, on a
$$(3+2\sqrt{2})^n=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\0\leq 2k\leq n}}\binom{n}{2k}(2\sqrt{2})^{2k}3^{n-2k}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\0\leq 2k+1\leq n}}\binom{n}{2k+1}(2\sqrt{2})^{2k+1}3^{n-2k-1}.$$

Ce qui permet d'obtenir

$$(3+2\sqrt{2})^n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k\le n}} \binom{n}{2k} 8^2 3^{n-2k} + \sqrt{2}\cdot 2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k+1\le n}} \binom{n}{2k+1} 8^k 3^{n-2k-1}.$$

On peut donc prendre

$$\boxed{x_n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k\le n}} \binom{n}{2k} 8^2 3^{n-2k} \quad \text{et} \quad y_n = 2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k+1\le n}} \binom{n}{2k+1} 8^k 3^{n-2k-1}.}$$

On a prouvé l'existence.
Pour l'unicité, on supposons (a_n, b_n) un couple solution, on a donc

$$a_n + b_n\sqrt{2} = x_n + y_n\sqrt{2}.$$

Il en résulte

$$(b_n - y_n)\sqrt{2} = x_n - a_n.$$

Si $b_n \neq y_n$, aurait $\sqrt{2} = \frac{x_n - a_n}{b_n - y_n}$, d'où $\sqrt{2}$ rationnel, ce qui est contradictoire. On conclut donc $b_n = y_n$ puis $a_n = x_n$, d'où l'unicité.

2. On a

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2}) = (x_n+y_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = (3x_n+4y_n)+(2x_n+3y_n)\sqrt{2}.$$

Par unicité démontrée à la question précédente, on a

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n. \end{cases}}$$

3. L'expression de la question 1 du coupe (x_n, y_n) nous donne directement $x_{n+1} \geq x_n$ et $y_{n+1} \geq y_n$, car les termes sont positifs, l'inégalité est strict dés que $x_n \neq 0$ et $y_n \neq 0$. Comme $x_1 = 3$ et $y_1 = 2$, on a donc pour $n \geq 1$, $x_{n+1} > x_n$ et $y_{n+1} > y_n$. Pour le rang 0, on a $x_0 = 1$ et y_0 et $x_1 = 3$ et $y_1 = 2$, l'inégalité stricte est encore vérifiée.
On conclut que $\boxed{\text{les suites } (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont strictement croissantes.}}$

4. Grâce à la question précédente, la suite de couples (x_n, y_n) parcourt une infinité de couples d'entiers naturels distincts. En développant par la formule du binôme et en séparant les termes par parité comme à la question 1, on obtient

$$\begin{aligned}(3-2\sqrt{2})^n &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k\le n}} \binom{n}{2k} (-2\sqrt{2})^{2k} 3^{n-2k} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k+1\le n}} \binom{n}{2k+1} (-2\sqrt{2})^{2k+1} 3^{n-2k-1} \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k\le n}} \binom{n}{2k} 8^2 3^{n-2k} - \sqrt{2}\cdot 2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\le 2k+1\le n}} \binom{n}{2k+1} 8^k 3^{n-2k-1} \\ &= x_n - y_n\sqrt{2}\end{aligned}$$

Soit, en multipliant,

$$(3-2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^n = (x_n - y_n\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}) = x_n^2 - 2y_n^2.$$

Or on a $(3-2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^n = \Big((3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\Big)^n = (9-8)^n$. Il en résulte

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1.$$

On conclut donc bien que

$$\boxed{\text{l'équation a une infinité de solutions.}}$$

Problème :

1. **Divergence de** (u_n) **:**

   (a) On calcule $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$. On conclut donc

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

   (b) On a

   $$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   On remarque de plus que

   $$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}.$$

   Il en résulte que

   $$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

   Il en résulte que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \tfrac{1}{2}.}$$

   (c) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ puis par opérations ur les limites, $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc une contradiction avec l'inégalité de la question précédente. On conclut

   $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

2. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = u_n - \ln(n+1)$ et $b_n = u_n - \ln n$.

   (a) On étudie la fonction φ définie sur $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = -\ln(x+1) + x$. On a $\varphi'(x) = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \geq 0$ pour $x \geq 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

   ,

   Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans l'étude, le tableau donne

   $$\boxed{\forall x \in]-1 + \infty[,, \quad -\ln(1+x) + x \geq 0.}$$

   (b) En appliquant, le résultat de la question précédente à $x = \frac{1}{n+1}$ qui est bien positif, on a

   $$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

   Pour l'autre, on remarque que pour $x = -\frac{1}{n+1}$, on a

   $$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1},$$

soit

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}.$$

En multipliant par -1 et en utilisant les propriétés du logarithme, on a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).}$$

(c) On calcule

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = -\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

grâce à la question précédente. On a donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est croissante.}}$ De même, on calcule

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = -\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0,$$

grâce à la question précédente. On a donc $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ est décroissante.}}$

(d) On calcule

$$a_n - b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0,$$

par croissance de la fonction ln. On a donc

$$\forall n, \quad a_n \leq b_n.$$

Grâce à la monotonie des suites (a_n) et b_n, on en déduit

$$\forall n, \quad a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0.$$

On conclut

$$\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont bornées.}}$$

(e) La suite (a_n) est croissante majorée par b_0, elle converge. La suite (b_n) est décroissante minorée par a_0, elle converge.
On conclut

$$\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ (respectivement } (b_n)) \text{ converge vers } \ell_a \in \mathbb{R} \text{ (respectivement } \ell_b \in \mathbb{R}).}$$

(f) On a montré que les suites (a_n) et (b_n) convergent et de plus

$$a_n - b_n = \ln(n) - \ln(n+1) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut

$$\boxed{\ell_a = \ell_b.}$$

3. On a $w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour la démonstration, écrire proprement la récurrence.

4. En regroupant, tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{2n+1}=\frac{(2a+2b+c)n^2+(3a+b+c)n+a}{n(n+1)(2n+1)}\cdot$$

Pour que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{2n+1},$$

il suffit donc que $(2a+2b+c)=0$, $(3a+b+c)=0$ et $a=1$, on résout et on trouve $a=b=1$ et $c=-4$. On conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \tfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{4}{2n+1}\cdot}$$

5. Première méthode, par récurrence, un peu lourd, mais cela marche.
Seconde méthode :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{\text{(tous les termes de la forme } \frac{1}{k} \text{ pour } k \text{ comprise entre 2 et } 2n+1.)} -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\
&= \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-1\\
&= u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\cdot
\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}=u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\cdot}$$

6. En utilisant la question 3, on a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Utilisant les question 3 et 4, on en déduit

$$\begin{aligned}
S_n &= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{4}{2k+1}\\
&= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-24\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\\
&= 6u_n+6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)-24\left(u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= -24u_{2n}+24u_n+18+\frac{6}{n+1}+\frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{S_n = -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \tfrac{6}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}.}$$

7. En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} S_n &= -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \\ &= -24(u_{2n} - \ln(2n)) + 24(u_n - \ln n) + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + 24(\ln(n) - \ln(2n)) \\ &= -24a_{2n} + 24a_n + 18 - 24\ln 2 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

   On a donc

$$\boxed{S_n = -24a_{2n} + 24a_n + 18 - 24\ln 2 + \tfrac{6}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}.}$$

8. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_a$, $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_a$ et $\frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 18 - 24\ln 2.}$$