Devoir Surveillé 1

Exercice 1.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} -x & + & (1+\lambda)y & = & -4-\mu \\ 2x & - & \lambda y & = & 9+\mu \end{cases}$$

Exercice 2.

1. Exprimer sous forme réduite
$$A_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j},$$
puis déterminer le plus petit entier strictement positif q tel que pour tout entier n, qA_n est un nombre entier.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, écrire sous forme réduite :
$$\sum_{0\leq i,j\leq n} a^{2i-j}.$$
3. En calculant de deux manière $\int_0^x (1+t)^n \mathrm{d}t$, obtenir des formes réduites de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$
et
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Exercice 3.

Résoudre sur $\mathbb{R}$.

$$2\left|x^2-3x\right| - |x-2| \leq 1.$$

Exercice 4.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

admet une infinité de solutions avec x et y entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'existence et l'unicité d'un couple $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}.$$
2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
3. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
4. Démontrer le résultat annoncé.

Problème :

Partie I : Etude de la série harmonique

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Divergence de (u_n) :**
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que (u_n) ne converge pas vers une limite finie.
2. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = u_n - \ln(n+1)$ et $b_n = u_n - \ln n$.
   (a) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   (c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones.
   (d) Etudier le signe de $a_n - b_n$ et en déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées.
   (e) Justifier que la suite (a_n) (respectivement (b_n)) converge vers $\ell_a \in \mathbb{R}$ (respectivement $\ell_b \in \mathbb{R}$).
   (f) Montrer que $\ell_a = \ell_b$.

Partie II : Etude d'une limite de somme

On définit les suites $(w_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ par
$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w_n}.$$
(a) Énoncer et démontrer la forme réduite de w_n.
(b) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$
(c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.$$
(d) Exprimer S_n en fonction de u_n, u_{2n} et n.
(e) Exprimer S_n en fonction de b_n, b_{2n} et n.
(f) Montrer que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on explicitera.