Devoir surveillé 12
Correction

Exercice 1 :

1. On remarque que
$$(1+t^2)e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
par croissance comparée. Donc il existe t_0, tel que pour $t \geq t_0$, $(1+t^2)e^{-t^2} \leq 1$. La fonction $t \mapsto (1+t^2)e^{-t^2}$ est continue sur le segment $[0, t_0]$, donc elle est majorée par $A = \max_{[0,t_0]} t \mapsto (1+t^2)e^{-t^2}$. On conclut que
$$\boxed{\text{Pour } t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)e^{-t^2} \leq M = \max(1, A).}$$

2. Grâce à la question précédente, on a, pour $t \in \mathbb{R}^+$
$$0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{M}{1+t^2}.$$
Pour $x \geq 0$, on intègre l'inégalité entre 0 et x et on a
$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \leq M \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = M\arctan(x) \leq M\frac{\pi}{2}.$$
On conclut $\boxed{\varphi(x) \leq M\frac{\pi}{2}.}$

3. On a $\varphi'(x) = e^{-x^2} \geq 0$, la fonction φ est donc croissante majorée (question précédente) et on conclut
$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

4. **Intégrale de Wallis :** On définit la suite d'intégrale (I_n) par
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) On a
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$
$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1, \qquad I_2 = \frac{\pi}{4}}$$

   (b) Utilisons l'indication :
$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) - \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^n(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$
   Par l'intégration par parties suivante (les fonctions considérées sont bien continues et de dérivées continues)
$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \sin(x)\cos^n(t) & v(x) = -\frac{1}{n+1}\cos(x)^{n+1}, \end{array}\right.$$
   on obtient

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \left[\sin(x)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cos(x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} I_{n+2}. \end{aligned}$$

Soit

$$I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2},$$

on a donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \tfrac{n+1}{n+2} I_n.}$$

(c) En multipliant l'égalité précédente par $(n+2)I_{n+1}$, on obtient

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n.$$

Par une récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \tfrac{\pi}{2}.}$$

(d) Comme $0 \leq \cos(x) \leq 1$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$0 \leq \cos(x)^{n+2} \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x).$$

En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

Soit

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n,$$

D'où grâce à la question 2,

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Comme $I_n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement, on a $\boxed{I_{n+1} \underset{n}{\sim} I_n.}$

(e) On a $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, grâce à la question 3, d'où en utilisant la question 5.

$$nI_n^2 = nI_nI_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

soit comme $I_n \geq 0$, par passage à la racine,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On conclut $\boxed{I_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

5. Inégalité de convexité ! Puis en l'appliquant $-\frac{t^2}{n}$, on a

$$\ln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -\frac{t^2}{n},$$

d'où, en multipliant par n,

$$n\ln(1 - \frac{t^2}{n}) \leq -t^2.$$

En passant l'exponentielle, on a donc

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

Puis en l'appliquant à nouveau l'inégalité à $\frac{t^2}{n}$, on a

$$\ln(1+\frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n},$$

d'où, en multipliant par n,

$$-t^2 \leq -n\ln(1+\frac{t^2}{n}).$$

En passant l'exponentielle, on a donc

$$e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

On conclut donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 0$,

$$\boxed{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} \leq e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\cdot}$$

6. On intègre en 0 et $\sqrt{n}$, l'inégalité précédente et on obtient

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}t \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t\cdot}$$

7. En utilisant les changements de variables indiquées et le formulaire trigonométrique $1-\sin^2(x) = \cos^2(x)$, on a, pour $t = \sqrt{n}\sin(x)$ d'où $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\cos(x)\mathrm{d}x$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^n\sqrt{n}\cos(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}I_{2n+1}.$$

Puis, pour $t = \sqrt{n}\tan(x)$ d'où $\mathrm{d}t = \sqrt{n}(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x$, comme $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right)^{n} \sqrt{n}(1+\tan^2(x))\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

$$\leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(x)\mathrm{d}x = \sqrt{n}I_{2n-1}\cdot$$

L'inégalité est conséquence de la positivité de l'intégrande. On conclut

$$\boxed{\sqrt{n}I_{2n+1} \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}I_{2n-2}.}$$

8. Grâce à l'équivalent calculé en 4.(e)., on a

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2n+1}} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\sqrt{n}I_{2n-1} \underset{n}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2n-1}} \underset{n}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\varphi(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

On conclut, par unicité de la limite,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot}$$

Exercice 2 :

Exercice 3 :

1. Pour $x = 0$, la somme est bien définie et pour $x \neq 0$, on a $\frac{x}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ qui converge par comparaison des séries à temres de signe constant aux séries de Riemann. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{x}{t^2+x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut donc appliquer un comparaison série-intégrale, pour $k \geq 1$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \leq \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t.$$

Par sommation, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_0^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t.$$

Un calcul d'intégral donne alors

$$\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

Comme $x > 0$ en passant à la limite en $n = +\infty$, on a

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

On passe à la limite en $x = +\infty$ et on conclut par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.}$$

3. **Vers un développement en série entière**
   (a) On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} - \frac{1}{n^2} \\
&= x\zeta(2) + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^2}{(n^2+x^2)n^2} \\
&= x\zeta(2) + x^3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{(n^2+x^2)n^2},
\end{aligned}$$

   où la fonction ζ est définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

   On pose $f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{(n^2+x^2)n^2}$ et on a

   (i) Le terme général est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{n^4}$, donc la série converge absolument donc converge.

   (ii) $|f_1(x)| = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+x^2)n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4).$

   On conclut que

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = a_1 x + x^3 f_1(x). \\ \text{où la fonction } f_1 \text{ a même ensemble de définition que la fonction } f \text{ et est bornée sur } \mathbb{R}. \end{array}}$$

(b) On conclut directement que

$$f(x) = x\zeta(2) + \underset{x \to 0}{O}(x^3).$$

On conclut que

$$\boxed{f \text{ admet un développement limité d'ordre 2 en 0.}}$$

(c) On remarque que

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n^2(n^2 + x^2)}$$

En poussant d'un rang de plus, on a

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n^4} + \frac{x^4}{n^4(n^2 + x^2)}.$$

En généralisant, on a

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k x^{2p}}{k^{2(p+1)}} + \frac{(-1)^p x^{2p}}{n^{2p}(n^2 + x^2)}.$$

(Ecrire une récurrence)

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^p x^{2p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(p+1)}} + (-1)^p x^{2p+1} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}(n^2 + x^2)}}_{g_p(x)}.$$

Les premiers coefficients sont des séries de Riemann qui convergent et g_p est définie par une série absolument convergente majorée par $\zeta(2p+2)$, car le terme général est majorée par $\frac{1}{n^{2p+2}}$. On a donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^p x^{2p+1} \zeta(2(p+1)) + \underset{x \to 0}{O}(x^{2p+1}).$$

On conclut que

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ admet un développement limité à tout ordre et tous les coefficients pairs sont nuls et les coefficient} \\ \text{impairs vérifient } a_{2k+1} = (-1)^k \zeta(2(k+1)). \end{array}}$$

On vérifie pour tout k, $|a_k| \leq \zeta(2)$.

(d) On a $\left|a_k x^k\right| \leq \zeta(2) x^k$, série géométrique convergente, donc la série est absolument convergente donc converge.

(e) En utilisant l'indication et la démarche de la question 3c, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^p x^{2p+1} \zeta(2(p+1)) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{k^{2(n+1)}(k^2 + x^2)} \right| \leq |x|^{2n+3} \zeta(2n+4) \leq |x|^{2n+3} \zeta(2).$$

par passage à la limite en n, comme $|x| \leq 1$, on a

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.}$$

Exercice 4 :

Partie 1 : Nombres algébriques

1. Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, il annule le polynôme $P = X - \alpha \in \mathbb{Q}[X]$, donc $\boxed{\alpha \text{ est algébrique.}}$
2. Le nombre $\sqrt{2}$ est racine de $P = X^2 - 2 \in \ \mathbb{Q}[X]$.
   Comme $i^2 = -1$, le nombre $1 + i$ est racine de $Q = (X - 1)^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
   On conclut
   $$\boxed{\sqrt{2} \text{ et } 1 + i \text{ sont des nombres algébriques.}}$$
3. Montrons, par double implication,
   $(ii) \Longrightarrow (i)$
   Si il existe $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Comme $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, on a $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$, donc α est algébrique.
   $(i) \Longrightarrow (ii)$
   Comme α algébrique, il existe $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On a donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où pour tout $k \in [0, n]$, $a_k = \frac{p_q}{q_k}$, où $(p_k, q_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On prend $m = \text{ppcm}(q_0, \cdots, q_n)$, on a $Q = mP = \sum_{k=0}^{n} \frac{mp_k}{q_k} X^k \in \mathbb{Z}[X] \setminus 0$ et $Q(\alpha) = mP(\alpha) = 0$. On a donc bien (ii).
4. Non trivial :
   (i) $1 \notin I(\alpha)$ donc $I \neq \mathbb{Q}[X]$
   (ii) α est algébrique donc il existe $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Comme $P \in I(\alpha)$, $I(\alpha) \neq \{0\}$.

   Vérifions que c'est un idéal, c'est à dire un sous-groupe de $\mathbb{Q}[X]$ pour l'addition :
   (i) $I(\alpha) \subset \mathbb{Q}[X]$, définition.
   (ii) Non vide déjà fait.
   (iii) Soit $P, Q \in I(\alpha)$, on a $(P - Q)(\alpha) = P(\alpha) - Q(\alpha) = 0 - 0 = 0$.

   On a bien $(I(\alpha), +)$ sous-groupe de $(Q[X], +)$.
   Absorbant, soit $P \in I[\alpha]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$, on a $(P \cdot Q)(\alpha) = P(\alpha) \cdot Q(\alpha) = 0$.
   On conclut
   $$\boxed{I(\alpha) \text{ est un idéal non trivial de } \mathbb{Q}[X].}$$
5. C'est un résultat de cours, mais on vous demande ici de le démontrer.
   Comme $I(\alpha) \neq \{0\}$, on définit
   $$A = \{\deg P\,;\, P \in I(\alpha) \setminus \{0\}\}\,.$$
   C'est une ensemble non vide d'entiers naturels, donc il admet un plus petit élément k. Il existe donc $P \in I(\alpha)$ tel que $\deg P = k$.
   Montrons que $I(\alpha) = P\mathbb{Q}[X]$.
   Par double inclusion :
   (a) Le sens $\supset$ est direct car $P \in I(\alpha)$ et $I(\alpha)$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Soit $Q \in I(\alpha)$ par la division euclidienne de Q par P, on a
   $$Q = AP + R,$$
   avec $\deg R < \deg P$. Comme $P, Q \in I(\alpha)$, on a $R(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha)A(\alpha) = 0$, d'où $R \in I(\alpha)$. Si $R \neq 0$, cela contredirait la minimalité du degré de $R = 0$ et $Q = AP$. Donc $Q \in P\mathbb{Q}[X]$.

   On conclut $\boxed{I(\alpha) = P\mathbb{Q}[X].}$
   Supposons α irrationnelle, si P admettait une racine rationnelle β, on aurait $P = (X - \beta)Q$ avec $Q \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$. On aurait donc $0 = P(\alpha) = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\neq 0} Q(\alpha)$, d'où $Q(\alpha) = 0$ donc $Q \in I(\alpha)$, contradiction avec la minimalité du degré de P.
6. Pour l'existence, on divise le polynôme P obtenu à la question précédente par son coefficient dominant. Pour l'unicité, si 2 polynômes P_1 et P_2 différents vérifiait la propriété, leur différence serait non nulle etde degré strictement inférieur et cela contredirait la minimalité du degré de P.

Partie 2 : M_{861} est transcendant

On définit le nombre M_{861} par

$$M_{861} = \sum_{k=0}^{+\infty} 861^{-(k!)}.$$

1. On a une série à termes positifs et pour tout k, $861^{-(k!)} \leq 861^{-k}$. La série de terme général 861^{-k} est convergente (série géométrique), on conclut M_{861} est bien défini. Le nombre M_{861} a un développement en basse 861 non ultimement périodique (des 0 et des 1 avec des plages de 0 de plus en plus longue), le nombre n'est donc pas rationnel.

2. (a) On a $\chi_\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$,où $a_\ell = 1$ et pour tout $k \in [0, \ell - 1]$, $a_k = \frac{p_q}{q_k}$, où $(p_k, q_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On définit $m = \text{ppcm}(q_0, \cdots, q_\ell)$, on a alors

$$mq^\ell \chi_\alpha \left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{m}{q_k} p_k p^k q^{\ell-k} \in \mathbb{Z}.$$

entiers comme produit et somme d'entiers, non nul, car χ_α n'a pas de racine rationnelle.

(b) La fonction polynomiale associée à χ'_α est continue sur le segment $[\alpha-\eta, \alpha+\eta]$, donc il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|\chi'_\alpha| \leq M$ sur $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, comme $\chi_\alpha(\alpha) = 0$, par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$

$$\boxed{|\chi_\alpha(x)| = |\chi_\alpha(x) - \chi_\alpha(\alpha)| \leq M\,|x - \alpha|.}$$

(c) Grâce au résultat de la question 2a, on a, pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$1 \leq mq^\ell \left|\chi_\alpha\left(\frac{p}{q}\right)\right|,$$

on déduit que

$$\frac{1}{mq^\ell} \leq \left|\chi_\alpha\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

Grâce au résultat de la question 2b, on a, pour $\frac{p}{q} \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$,

$$\left|\chi_\alpha\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

Il en résulte que pour $\frac{p}{q} \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$,

$$\boxed{\left|\tfrac{p}{q} - \alpha\right| \geq \tfrac{B}{q^\ell},}$$

avec $B = \frac{1}{Mm}$.

3. On a

$$R_n = M_{861} - \sum_{k=0}^{n} 861^{-(k!)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 861^{-(k!)}.$$

C'est donc un nombre positif non nul, puis par décalage d'indice, on a

$$R_n = \sum_{l=0}^{+\infty} 861^{-((l+n+1)!)} = 861^{-((n+1)!)} \sum_{l=0}^{+\infty} 861^{(n+1)!-((l+n+1)!)}.$$

La suite $(n+1)! - ((l+n+1)!))_{l\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et parcourt les entiers négatifs, on a donc

$$\sum_{l=0}^{+\infty} 861^{(n+1)!-((l+n+1)!)} \leq \sum_{l=0}^{+\infty} 861^{-l} = \frac{1}{1 - 861^{-1}} = \frac{861}{860} \leq 2.$$

Il en résulte

$$\boxed{R_n \leq 2 \cdot 861^{-((n+1)!)} = 2 \cdot \left(861^{-(n!)}\right)^{n+1}.}$$

4. Supposons M_{861} algébrique de degré k (degré de son polynôme minimale), il existe donc $B > 0$, tel que pour tout $\frac{p}{q} \in [M_{861} - 1, M_{861} + 1]$,
$$\left| M_{861} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{B}{q^k}.$$
Pour n suffisamment grand, on a bien $R_n \leq 1$, donc $\sum_{k=0}^{n} 861^{-(k!)} \in [M_{861} - 1, M_{861} + 1]$. On a de plus,
$$\sum_{k=0}^{n} 861^{-(k!)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} 861^{n!-(k!)}}{861^{n!}} = \frac{p_n}{q_n},$$
où p_n, $q_n = 861^{n!}$ sont des entiers. On obtient donc
$$R_n = M_{861} - \frac{p_n}{q_n} \geq \frac{B}{q_n^k} = \frac{B}{861^{k(n!)}}.$$
En utilisant l'inégalité de la question précédente, on a donc
$$2 \cdot \left(861^{-(n!)}\right)^{n+1} \geq R_n \geq \frac{B}{861^{k(n!)}}.$$
Soit
$$2 \cdot \left(861^{-(n!)}\right)^{k-n-1} \geq B\cdot$$
On passe à la limite dans l'inégalité de gauche et on obtient $0 \geq B$, contradictoire ! On conclut
$$\boxed{\text{le nombre } M_{861} \text{ est un nombre transcendant.}}$$