Devoir surveillé 12

Consignes :

- Calculatrice autorisée.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1 :

Objectif : Justifier l'existence de l'intégrale suivante et calculer sa valeur
$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par
$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$
$$(1+t^2)e^{-t^2} \leq M.$$
2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\varphi(x) \leq M\frac{\pi}{2},$$
où M a été défini à la question précédente.
3. Justifier que la fonction φ admet une limite finie en $+\infty$.
4. **Intégrales de Wallis :** On définit la suite d'intégrale (I_n) par
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Calculer I_0, I_1 et I_2.
   (b) Montrer que $\forall n \geq 0, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. (On pourra regarder la quantité $I_n - I_{n+2}$)
   (c) Montrer que la quantité $(n+1)I_{n+1}I_n$ est indépendante de n, on déterminera sa valeur.
   (d) Montrer que la suite (I_n) est monotone et en déduire que
$$I_n \underset{n}{\sim} I_{n+1}.$$
   (e) En déduire que
$$I_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
5. Justifier que pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$, puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 0$
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t\cdot$$
7. Montrer que
$$\sqrt{n}I_{2n+1} \leq \varphi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(t)\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}I_{2n-2}.$$
(On pourra faire les changement de variables $t = \sqrt{n}\sin x$ et $t = \sqrt{n}\tan x$.)
8. Déterminer la valeur de J.

Exercice 2 :

1. On fixe $x \in]-1,1[$. Après avoir justifié la convergence absolue de la série, en utilisant une formule de Taylor, démontrer que
$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
.

2. Justifier rapidement la convergence et calculer la somme des séries définies par les termes généraux suivants (Les sommes commencent à 1.)
   (a) $u_n = \frac{1}{n2^n}$.
   (b) $v_n = \frac{a_n}{n}$, où (a_n) vérifie, $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout n, $a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{18}a_n$.
   (c) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n k(n-k)}$

Exercice 3 : On définit la fonction f par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. En utilisant un encadrement série-intégrale, montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.
(*Indication :*
Étape 1 : Encadrer.
Étape 2 : Passer à la limite.)
3. **Vers un développement en série entière**
   (a) Déterminer une constante a_1 exprimée sous forme d'une série numérique et une fonction f_1 exprimée sous forme d'une série, tel que
   $$f(x) = a_1 x + x^3 f_1(x).$$
   La fonction f_1 devra avoir même ensemble de définition que la fonction f et être bornée sur $\mathbb{R}$.
   (*Indication : Soustraire un équivalent simple en $x = 0$ du terme général.)*
   (b) Justifier que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
   (c) Généraliser en montrant que f admet une développement limité à tout ordre en 0.
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
   On exprimera les termes a_k sous forme de séries numériques et on montrera que la suite (a_n) est bornée.
   (Indication : On pourra utiliser après l'avoir justifié la formule $\frac{1}{n^2+x^2} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{n^{2(k+1)}}\right) + \frac{(-1)^p x^{2p}}{n^{2p}(n^2+x^2)}$*.)*
   (d) Soit $x \in]-1,1[$, démontrer que la série de terme général $a_k x^k$ converge.
   (e) Justifier que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$
   (*On pourra majorer* $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k \right|$ *de manière judicieuse. Rappel : les développements limités ne donnent qu'un comportement local.)*

Exercice 4 :

Les parties sont largement indépendantes, on pourra admettre le résultat de la dernière question de la partie 1 pour faire la suite..

Partie 1 : Nombres algébriques

Soit α un nombre complexe, on dit que α est algébrique sur $\mathbb{Q}$, si il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. On dit que α est un nombre transcendant, si il ne vérifie pas cette propriété.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que α est algébrique.
2. Les 2 nombres suivants sont-ils algébriques ?
$$\sqrt{2}, \quad 1 + i.$$
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) α est algébrique sur $\mathbb{Q}$.
   (ii) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$.
4. Soit α un nombre algébrique, montrer que
$$I(\alpha) = \{P\,;\ P \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{et} \quad P(\alpha) = 0\}$$
est un idéal non trivial de $\mathbb{Q}[X]$. (C'est-à-dire différent de $\{0\}$ et $\mathbb{Q}[X]$)
5. On conserve la notation précédente, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que
$$I(\alpha) = P\mathbb{Q}[X],$$
justifier de plus que si α n'est pas un nombre rationnel, alors P n'a pas de racine rationnelle.
6. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire χ_α à coefficients rationnels tel que
$$I(\alpha) = \chi_\alpha\mathbb{Q}[X],$$
on l'appelle le polynôme minimal de α, si α n'est pas rationnel, χ_α n'a pas de racine rationnelle (résultat question précédente).

Partie 2 : M_{861} est transcendant

On définit le nombre M_{861} par
$$M_{861} = \sum_{k=0}^{+\infty} 861^{-(k!)}.$$

7. Justifier que ce nombre est bien défini et qu'il n'est pas rationnel. **(Base 861....)**
8. **Un critère d'algébricité :** Soit α un nombre réel algébrique irrationnel et χ_α son polynôme minimal. On suppose $\deg \chi_\alpha = \ell$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier m tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$,
$$mq^\ell \chi_\alpha(\frac{p}{q})$$
   est entier non nul.
   (b) Soit $\eta > 0$, montrer l'existence de $A > 0$, tel que pour tout $x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$,
$$|\chi_\alpha(x)| \leq A\,|x - \alpha|\,.$$
   (On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la quantité $|\chi_\alpha(x) - \chi_\alpha(\alpha)|$.)
   (c) Montrer qu'il existe $B > 0$, tel que pour tout rationnel $\frac{p}{q} \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$,
$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{B}{q^\ell}.$$
9. Montrer que $R_n = M_{861} - \sum_{k=0}^{n} 861^{-(k!)}$ est un nombre positif non nul et que
$$R_n \leq 2 \cdot \left(861^{-(n!)}\right)^{n+1}.$$
10. Supposer M_{861} est algébrique et conclure à une contradiction.