# Devoir surveillé 11
# Correction

**Exercice 1 :**

**Exercice 2 :**

1. Pour calculer la limite en $t=x$, effectuons le changement de variable $t=x+h$. On a alors

$$f_n(x+h)=\frac{\cos(n(x+h))-\cos(nx)}{\cos(x+h)-\cos(x)}.$$

On peut utiliser un dévelopement limité en $h$, mais le plus simple est d'écrire

$$f_n(x+h)=\frac{\cos(n(x+h))-\cos(nx)}{h}\frac{h}{\cos(x+h)-\cos(x)}.$$

On reconnait les taux d'accroissement des fonctions $g=t\mapsto\cos(nt)$ et $h=t\mapsto\cos(t)$ au point $x$. Or $g'(x)=-n\sin(nx)$ et $h'(x)=-\sin(x)\neq 0$ (car $x\in]0,\pi[$), on résulte donc

$$f_n(t)\underset{t\to x}{\longrightarrow}n\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.$$

On conclut que la fonction $f_n$ se prolonge par continuité à $[0,\pi]$ par

$$\boxed{\text{la fonction } \tilde{f_n} \text{ définie par } \tilde{f_n}(x)=\begin{cases} f_n(x) & \text{si } t\neq x\\ n\frac{\sin(nx)}{\sin(x)} & \text{si } t=x.\end{cases}}$$

2. On définit la suite $(I_n)$ par

$$I_n=\int_0^\pi \tilde{f_n}(t)\mathrm{d}t.$$

(a) On calcule, en utilisant le formulaire trigonométrique,

$$\begin{aligned} I_{n+2}+I_n &= \int_0^\pi \frac{\cos((n+2)t)+\cos(nt)-\cos((n+2)x)-\cos(nx)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi \frac{2\cos((n+1)t)\cos(t)-2\cos((n+1)x)\cos(x)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi \frac{2\cos((n+1)t)(\cos(t)-\cos(x))+2\cos((n+1)t)\cos(x)-2\cos((n+1)x)\cos(x)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^\pi \cos((n+1)t)\mathrm{d}t+2\cos(x)\int_0^\pi\frac{\cos((n+1)t)-\cos((n+1)x)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{2\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^\Pi}_{=0}+2\cos(x)\int_0^\pi\frac{\cos((n+1)t)-\cos((n+1)x)}{\cos(t)-\cos(x)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{I_{n+2}+I_n=2\cos(x)I_{n+1}.}$$

(b) On reconnait une récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2-2\cos(x)r+1=0$. On la résout et on trouve 2 racines $r_1=e^{ix}$ et $r_2=e^{-ix}$ qui sont différentes, car $x\in]0,\pi[$. On en déduit l'existence de $A$ et$B$ 2 complexes tel que pour tout $n$

$$I_n=Ae^{int}+Be^{-inx}.$$

Or $I_0 = \int_0^\pi 0\mathrm{d}t = 0$ et $I_1 = \int_0^\pi 1\mathrm{d}t = \pi$, on résout

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ Ae^{ix}+Be^{-ix} & = & \pi \end{array}\right.$$

On trouve alors $B = \frac{\pi}{e^{-ix}-e^{ix}} = -\frac{\pi}{2i\sin(x)}$ et $A = \frac{\pi}{-e^{-ix}+e^{ix}} = \frac{\pi}{2i\sin(x)}$, on injecte dans l'expression de $I_n$ et on obtient, grâce aux formules d'Euler,

$$\boxed{I_n = \frac{\pi}{2i\sin(x)}e^{inx} - \frac{\pi}{2i\sin(x)}e^{-inx} = \pi\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i\sin(x)} = \pi\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.}$$

# Problème 1 :

1. En utilisant l'indication, considérons l'application $\varphi$ définie de $F$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 3 dans $\mathbb{R}^4$ par $\varphi(g) = (g(a), g'(a), g(b), g'(b))$. C'est une application linéaire par linéarité de la dérivation et de l'évaluation. On a $\dim F = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Montrons que $\varphi$ est un isomorphisme. Comme les dimensions sont finies et égales, il suffit de montrer l'injectivité.
   Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{t \mapsto 0\}$. L'inclusion $\supset$ est claire. Pour la réciproque, soit $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a donc $g(a) = g'(a) = 0$ et $g(b) = g'(b) = 0$, d'où $a$ et $b$ sont 2 racines distinctes au moins double de $g$, or le degré de $g$ est au plus 3, donc $g$ est nulle.
   On conclut que $\varphi$ est un isomorphisme, donc pour tout $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, il existe une unique fonction de $g$ tel que
   $$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b), \quad g'(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad g'(b) = f'(b).$$

2. On définit la fonction $\psi$ sur $[a,b]$ par
   $$\psi(t) = g(t) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(t-\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f'(b)-f'(a)}{2(b-a)}(t-a)(t-b)$$
   (a) Comme $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$, on a directement
   $$\boxed{\psi(a) = \psi(b) = 0.}$$
   (b) On calcule
   $$\psi'(t) = g'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)}\left(t-\frac{a+b}{2}\right),$$
   donc
   $$\psi'(a) = f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{f'(b)-f'(a)}{2} = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{f'(a)+f'(b)}{2}$$
   et
   $$\psi'(b) = f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f'(b)-f'(a)}{2} = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{f'(a)+f'(b)}{2} = \psi'(a)$$
   Par sommation de fonctions polynomiales de degré au plus 3, on sait que $\psi$ est une fonction polynomiale de degré au plus 3, donc $\psi'$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2. Comme $\psi'(a) = \psi'(b)$ et la majoration du degré, on en déduit que $\psi'(t) = \psi'(a) + \lambda(t-a)(t-b)$. On en déduit que $\psi(t) = \lambda\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \lambda\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \psi'(a)$ qui est bien la forme voulue. On conclut qu'il existe $A$ et $B$ 2 réels, tel que
   $$\boxed{\text{pour tout } t \in [a,b],\ \psi'(t) = A\left(t-\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + B.}$$

(c) Par sommation de fonctions polynomiales de degré au plus 3, on sait que $\psi$ est une fonction de degré au plus 3, calculons son intégrale sur $[a, b]$.

Effectuons l'intégration par partie $\begin{cases} u(t) = \psi(t) & u'(t) = \psi'(t) \\ v'(t) = 1 & v(t) = t - \frac{a+b}{2}. \end{cases}$, on a donc en utilisant $\psi'(a) = \psi'(b) = 0$

$$\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t = \left[\psi(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \psi'(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t = -\int_a^b \psi'(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b A\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3 + B\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t = -\left[\frac{A}{4}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^4 + \frac{B}{2}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b = 0.$$

On conclut donc bien

$$\boxed{g(t) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'(b)-f'(a)}{2(b-a)}(t-a)(t-b) + \psi(t), \quad \text{où } \int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t = 0.}$$

3. On calcule

$$\int_a^b 1\mathrm{d}t = (b-a), \qquad \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^b (t-a)(t-b)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a+b}{2}t^2 + abt\right] \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{a+b}{2}b^2 + ab^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a+b}{2}a^2 - a^2b \\ &= -\frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6} = -\frac{(b-a)^3}{6}. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale et le fait que $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\mathrm{d}t = 0$, on conclut

$$\boxed{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b) - f'(a)).}$$

4. Soit $c \in ]a, b[$, utilisons l'indication et choisissons $\lambda$ tel que $h_\lambda(c) = 0$, il suffit de prendre $\lambda = \frac{f(c)-g(c)}{(c-a)^2(c-b)^2}$. (possible car $c \neq a$ et $c \neq b$).
Pa construction, on a donc $h_\lambda(a) = h_\lambda(c) = h_\lambda(b) = 0$. Par les règles de composition, la fonction $h_\lambda$ est dérivable sur $[a, b]$, comme $a < c < b$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle et il existe $\alpha$ et $\beta$ tel que $a < \alpha < c < \beta < b$ et $h'_\lambda(\alpha) = h'_\lambda(\beta) = 0$. De plus, on calcule $h'_\lambda(a) = h'_\lambda(b) = 0$. Comme $h_\lambda$ est de classe $\mathcal{C}^4$, on peut stéré le procédé et on a donc $h''_\lambda$ a au moins 3 zéros, $h_\lambda^{(3)}$ a au moins 2 zéros, puis $h_\lambda^{(4)}$ a au moins 1 zéro $d$. Comme $g$ est polynomiale de degré au plus 3,on a

$$h_\lambda^{(4)}(t) = g^{(4)}(t) - f^{(4)}(t) + 24\lambda = -f^{(4)}(t) + 24\lambda.$$

On a donc $-f^{(4)}(d) + 24\lambda = 0$ et on a donc $d \in ]a, b[$ tel que :

$$\boxed{f(c) = g(c) + \frac{f^{(4)}(d)}{24}(c-a)^2(c-b)^2.}$$

5. La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^4$ par composition, donc la fonction $\left|f^{(4)}\right|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet donc un maximum donc $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$ existe.

   Grâce à la question précédente, on a, pour $t \in [a,b]$,

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{M}{24}(t-a)^2(b-t)^2.$$

   On en déduit

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq M \int_a^b (t-a)^2(b-t)^2\mathrm{d}t.$$

   Première méthode calculer explicitement l'intégrale (un peu lourd...) et on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^5}{30} \cdot .$$

   Deuxième méthode, plus simple, permettant d'obtenir un résultat un peu plus grossier, mais suffisant pour les questions suivantes :

   On calcule le maximum de $t \mapsto (t-a)(b-t)$ sur $[a,b]$ et on trouve $\frac{(b-a)^2}{4}$, on en déduit

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^5}{16}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(a_0, \cdots, a_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$ (c'est-à-dire pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$). On note $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction $g_{[a_i,a_{i+1}]}$ est la fonction spline de $f_{[a_i,a_{i+1}]}$.

On pose enfin $S_n = \displaystyle\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t$.

6. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

   Comme $g_{[a_i,a_{i+1}]}$ est une fonction spline, grâce à la question 3, o n en déduit

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( (a_{i+1} - a_i)\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} - \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{12}(f'(a_{i+1}) - f'(a_i)) \right).$$

   En simplifiant, on obtient

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{b-a}{n}\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} - \frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(a_{i+1}) - f'(a_i)) \right).$$

   Puis en simplifiant par télescopage, on obtient

$$\boxed{S_n = -\frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b) - f'(a)) + \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}\right).}$$

7. En réutilisant la relation de Chasles, on a

$$S_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (g_n(t) - f(t))\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |g_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la question 5, on a

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |g_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\frac{(a_{i+1} - a_i)^5}{24 \cdot 30} = \frac{M}{24 \cdot 30n^5}.$$

Par sommation, on en déduit,

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{24 \cdot 30n^4}.$$

On conclut donc

$$\boxed{S_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

On applique la méthode précédente pour $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \frac{1}{1+t}$ et $n = 2$.

8. On calcule

$$S_2 = -\frac{1}{48}(f'(1)-f'(0))+\sum_{i=0}^{1} \frac{f\left(\frac{i}{2}\right) + f\left(\frac{i+1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{48}\cdot(-\frac{1}{4}+1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{133}{192} \approx 0,693$$

On calcule $f^{(4)}(t) = \frac{24}{(1+t)^5}$. On en déduit que $\sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(4)}(t)\right| = 24$. En utilisant la question 7, on en déduit que

$$|S_2 - \ln 2| \leq \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 0,002.$$

9. Comme pour $t \in [0,1]$, $f^{(4)}(t) \geq 0$, la question 4 nous permet de dire que $g$ est une approximation par défaut de la fonction $f$.

On conclut donc que $S_2$ est une approximation par défaut de l'intégrale de $f$.

## 1. Problème : ruine du joueur

On considère le jeu suivant : deux personnes s'affrontent en une succession de manches mutuellement indépendantes. Une manche fixée peut être remportée par le joueur A avec une probabilité $a \in ]0,1[$, ou bien par le joueur B avec une probabilité $b = 1 - a$. La fortune du gagnant augmente alors de 1 euro, pendant que celle de son adversaire diminue du même montant. La fortune initiale de A est de $n$ euros, la fortune initiale de B est $N - n$ euros, où $N$ est un entier naturel strictement positif fixé (sauf indication contraire) et $n$ un entier naturel inférieur ou égal à $N$. Dès qu'un joueur est ruiné (c'est-à-dire dès que sa fortune devient nulle), le jeu s'arrête.

On note également $p_n$ la probabilité que A finisse par remporter la partie. Cette probabilité dépend bien sûr de sa fortune initiale $n$. On a par exemple $p_0 = 0$ et $p_N = 1$. On note enfin $q_n$ la probabilité que B gagne la partie.

On pourra éventuellement utiliser les notations suivantes : $A_k$ est l'événement « A remporte la $k$ ième manche », $B_k$ l'événement « B remporte la $k$ ième manche .

**1.1.** Justifier que $p_n = ap_{n+1} + (1-a)p_{n-1}$ si $n \in [\![1, N-1]\!]$.

Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$ et $A$ l'événement « A finit par remporter la partie ». D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $(A_1, \overline{A_1})$, on a $\boxed{p(A) = p(A_1)p_{A_1}(A) + p(\overline{A_1})p_{\overline{A_1}}(A)}$ soit encore $p_n = ap_{n+1} + (1-a)p_{n-1}$. En effet, si A remporte le premier point il se retrouve avec une mise de $n+1$ euros pendant que B possèdera $N - (n+1)$ euros.

**1.2.** On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{2}$.

**1.2.1.** Déterminer la valeur de $p_n$ en fonction de $n$.

L'équation caractéristique associée à cette suite RL2 est $ar^2 - r + (1-a) = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4a(1-a) = 0$ car ici $a = \dfrac{1}{2}$. La racine double est 1. Donc $p_n$ peut s'écrire ici $\alpha + \beta n$. Comme $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ on obtient $\boxed{p_n = \dfrac{n}{N}.}$

**1.2.2.** Donner par un raisonnement rapide la valeur de $q_n$.

Vue la fortune initiale de B, on a *mutatis mutandis* $\boxed{q_n = \dfrac{N-n}{N}\ .}$

**1.2.3.** Calculer $p_n + q_n$ et interpréter.

On a $\boxed{p_n + q_n = 1}$. Cela signifie que la probabilité que le jeu s'éternise est nulle.

**1.3.** On suppose dans cette question que $a \neq \dfrac{1}{2}$. On pose $\alpha = \dfrac{1-a}{a}$.

**1.3.1.** Exprimer $p_n$ pour tout $n \in [\![0, N]\!]$ en fonction de $\alpha$, $n$ et $N$.

L'équation $ar^2 - r + (1-a) = 0$ a pour solutions $r = 1$ et $r = \dfrac{1-a}{a} = \alpha \neq 1$ car $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Donc $p_n = A + B\alpha^n$. On a $p_0 = 0, p_N = 1$ donc $A + B = 0$ et $A + B\alpha^N = 1$ donc $B = -A$ et $A = \dfrac{1}{1-\alpha^N}$ .

Finalement $\boxed{p_n = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha^N} = a^{N-n}\dfrac{a^n - (1-a)^n}{a^N - (1-a)^N}}$ pour tout $n \in [\![0, N]\!]$.

**1.3.2.** Donner par un raisonnement rapide la valeur de $q_n$ (on donnera une expression avec une seule barre de fraction).

On a *mutatis mutandis* $\left(a \leftarrow 1-a, n \leftarrow N-n\right)$ $q_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{\alpha^{N-n}}}{1-\dfrac{1}{\alpha^N}} = \alpha^n \dfrac{\alpha^{N-n}-1}{\alpha^N-1}$, donc $\boxed{q_n = \alpha^n \dfrac{1-\alpha^{N-n}}{1-\alpha^N}.}$

**1.3.3.** Vérifier que $p_n + q_n = 1$.

Donc $p_n + q_n = \dfrac{1-\alpha^n + \alpha^n\left(1-\alpha^{N-n}\right)}{1-\alpha^N} = \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha^N}$, donc $\boxed{p_n + q_n = 1.}$ Cela signifie encore une fois que la probabilité que la partie n'ait pas de vainqueur (que le jeu ne s'arrête pas) est nulle.

**1.3.4.** Montrer que si $a = \dfrac{4}{5}$ et $n = 4$ alors la probabilité que B finisse par l'emporter est inférieure à 4 millièmes quelque soit la fortune initiale de B !

Supposons que $a = \dfrac{4}{5}$ et $n = 4$. Alors $p_n = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha^N} > 1-\alpha^n$ car $0 < 1-\alpha^N < 1$ et $1-\alpha^n > 0$. Donc

$q_n = 1 - p_n < \alpha^n = \dfrac{1}{4^4} = \dfrac{1}{256} < \dfrac{1}{250} = 4 ‰$ i.e. $\boxed{\text{la probabilité que B finisse par l'emporter est inférieure à 4 millièmes}}$ quelque soit la fortune initiale de B !

**1.3.5.** Dans cette question $n$ est fixé et la fortune initiale de B est très grande : on considèrera qu'elle tend vers $+\infty$. Discuter la limite de $p_n$ ($n$ fixé, $N \to +\infty$) en discutant selon la valeur de $a$.

On a ici $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. Deux cas se présentent : $\boxed{\text{si } \alpha > 1 \text{, i.e. } a < \dfrac{1}{2}\text{, alors } p_n = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha^N} \to 0 \text{ quand } N \to \infty}$.

$\boxed{\text{Sinon } 0 < \alpha < 1 \text{ et } p_n \to 1-\alpha^n \text{ !}}$

**1.4. Quelques précisions**

On note respectivement $p\left(n,k\right)$ (resp. $q\left(n,k\right)$) la probabilité que A (resp. B) remporte la partie après $k$ manches exactement, la fortune initiale de A valant $n$. Ces notations et hypothèses sont valables dans la suite.

**1.4.1.** Donner la valeur de $q\left(n,k\right)$ en fonction de $a,b$ (ou $a$ seulement) dans les cas suivants :

**1.4.1.1.** $k = n \in \left\{1,..,N-1\right\}$

Ici B doit gagner $n$ manches consécutives donc $\boxed{q\left(n,n\right) = b^n}$

**1.4.1.2.** $k < n$

B ne peut pas ruiner A en moins de manches que A n'a d'euros donc $\boxed{q\left(n,k\right) = 0}$

**1.4.1.3.** $n = 1, k = 3, N > 2$

On a $\boxed{q\left(1,3\right) = ab^2}$ (A doit remporter la première manche et B les deux suivantes)

**1.4.1.4.** $n = 1, k = 5, N > 3$

On a $\boxed{q\left(1,3\right) = a^2b^3 + abab^2 = 2a^2b^3}$ (deux parties possibles : AABBB et ABABB)

**1.4.2.** Exprimer $q\left(n,k\right)$ à l'aide de $a,b$ et de valeurs de la forme $q\left(l,k-1\right)$ si $n,k \in \mathbb{N}^*$.

On a $\boxed{q\left(n,k\right) = aq\left(n+1,k-1\right) + bq\left(n-1,k-1\right)}$ si $n,k \in \mathbb{N}^*$ par le même raisonnement qu'à la question 1, sauf qu'il faut tenir compte de la durée des parties.

**1.4.3.** Expliquer rapidement comment obtenir grâce à cette formule les valeurs des $q(n,k)$ en fonction de $n$ et $k$ dans un cas concret où $N$ est connu.

On a donc une formule de récurrence simple sur $k$ portant sur les $q(n,k)$. Comme on connaît les $q(n,1)$ (ainsi d'ailleurs que les $q(n,0)$ si on préfère redescendre d'un cran) qui valent tous 0 sauf $q(1,1) = b$ , on peut en déduire les $q(n,k)$ qui sont nuls si $n > k$ (donc il y aura un nombre fini de calculs à faire !)