Devoir surveillé 11

Consignes :

- Calculatrice autorisée.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P_n = X^{2n} - 1$.
2. Pour $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on définit la fonction f_r par $f_r(t) = \ln(r^2 - 2r\cos(t) + 1)$ et $I(r) = \int_0^\pi f_r(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que $I(r)$ est bien définie.
   (b) En utilisant une somme de Riemann, calculer $I(r)$ en fonction de r.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \pi[$, on définit la fonction f_n sur $[0, \pi] \setminus \{x\}$ par

$$f_n(t) = \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)}.$$

1. Montrer que f_n se prolonge en une fonction continue $\tilde{f_n}$ définie sur $[0, \pi]$. On précisera la valeur $\tilde{f_n}(x)$.
2. On définit la suite (I_n) par
$$I_n = \int_0^\pi \tilde{f_n}(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que pour tout n, on a $I_{n+2} + I_n = 2\cos(x)I_{n+1}$.
   (b) Déterminer une expression réduite de I_n en fonction de n.

Problème 1 :

Les questions ne sont pas indépendantes, on pourra admettre les résultats des question précédentes pour traiter une question.

Une méthode d'intégration numérique :

Soient 2 réels a et b tel que $a < b$, on considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Partie I : Etude de la méthode sur un pas

1. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale g de degré au plus 3, tel que
$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b), \quad g'(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad g'(b) = f'(b).$$
La fonction g est appelée spline de f sur $[a, b]$.
(On pourra introduire une application linéaire)

2. On définit la fonction ψ sur $[a,b]$ par
$$\psi(t)=g(t)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f'(b)-f'(a)}{2(b-a)}(t-a)(t-b)$$
   (a) Calculer $\psi(a)$ et $\psi(b)$.
   (b) Calculer $\psi'(a)$ et $\psi'(b)$ et en déduire qu'il existe A et B 2 réels tel que pour tout $t\in[a,b]$, $\psi'(t)=A\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+B$.
   (c) Montrer que, pour tout $t\in[a,b]$,
$$g(t)=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(b)-f'(a)}{2(b-a)}(t-a)(t-b)+\psi(t),$$
   où ψ est une fonction polynomiale de degré au plus 3 tel que $\displaystyle\int_a^b\psi(t)\mathrm{d}t=0$.
   (On pourra faire une intégration par partie pour calculer $\displaystyle\int_a^b\psi(t)\mathrm{d}t$*.)*
3. Exprimer le réel $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ et $f'(b)$.
4. Montrer que, pour tout $c\in]a,b[$, il existe $d\in]a,b[$ tel que :
$$f(c)=g(c)+\frac{f^{(4)}(d)}{24}(c-a)^2(c-b)^2.$$
   (Pour un λ réel bien choisi, on pourra introduire la fonction h_λ définie sur $[a,b]$ par
$$h_\lambda(t)=g(t)-f(t)+\lambda(t-a)^2(t-b)^2.)$$
5. Justifier que $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$ existe, puis montrer qu'il existe K une constante indépendante de f, de a et de b que l'on explicitera tel que
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right|\leq KM(b-a)^5.$$

Partie II : Méthode à n pas

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note $(a_0,\cdots,a_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$ (c'est-à-dire pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $a_i=a+i\frac{b-a}{n}$). On note $g_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ la fonction telle que, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, la restriction $g_{[a_i,a_{i+1}]}$ est la fonction spline de $f_{[a_i,a_{i+1}]}$.

On pose enfin $S_n=\displaystyle\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t$.

6. Montrer que
$$S_n=-\frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(b)-f'(a))+\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right).$$
7. Montrer que $S_n-\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Partie III : Application

On applique la méthode précédente pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\frac{1}{1+t}$ et $n=2$. On donnera les valeurs exactes puis des résultats numériques à une précision de 10^{-3}.

8. Donner une valeur approchée S_2 de $\ln 2$ et une majoration de l'erreur.
9. Etudier le signe de $f^{(4)}$ sur $[0,1]$ et préciser en utilisant les questions précédentes si c'est une valeur approchée par excès ou par défaut.

1. Problème 1 : ruine du joueur

On considère le jeu suivant : deux personnes s'affrontent en une succession de manches mutuellement indépendantes. Une manche fixée peut être remportée par le joueur A avec une probabilité $a \in \left]0,1\right[$, ou bien par le joueur B avec une probabilité $b = 1 - a$. La fortune du gagnant augmente alors de 1 euro, pendant que celle de son adversaire diminue du même montant. La fortune initiale de A est de n euros, la fortune initiale de B est $N - n$ euros, où N est un entier naturel strictement positif fixé (sauf indication contraire) et n un entier naturel inférieur ou égal à N. Dès qu'un joueur est ruiné (c'est-à-dire dès que sa fortune devient nulle), le jeu s'arrête.

On note également p_n la probabilité que A finisse par remporter la partie. Cette probabilité dépend bien sûr de sa fortune initiale n. On a par exemple $p_0 = 0$ et $p_N = 1$.

On note enfin q_n la probabilité que B gagne la partie, avec sa fortune initiale égale à $N - n$.

On pourra éventuellement utiliser les notations suivantes : A_k est l'événement « A remporte la k ième manche », B_k l'événement « B remporte la k ième manche ».

1.1. Justifier que $p_n = ap_{n+1} + \left(1 - a\right)p_{n-1}$ si $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

1.2. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{2}$.

1.2.1. Déterminer la valeur de p_n en fonction de n.

1.2.2. Donner par un raisonnement rapide la valeur de q_n .

1.2.3. Calculer $p_n + q_n$ et interpréter.

1.3. On suppose dans cette question que $a \neq \dfrac{1}{2}$. On pose $\alpha = \dfrac{1-a}{a}$.

1.3.1. Exprimer p_n pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ en fonction de α , n et N.

1.3.2. Donner par un raisonnement rapide la valeur de q_n (on donnera une expression avec une seule barre de fraction).

1.3.3. Vérifier que $p_n + q_n = 1$.

1.3.4. Montrer que si $a = \dfrac{4}{5}$ et $n = 4$ alors la probabilité que B finisse par l'emporter est inférieure à 4 millièmes quelle que soit la fortune initiale de B !

1.3.5. Dans cette question n est fixé et la fortune initiale de B est très grande : on considèrera qu'elle tend vers $+\infty$. Discuter la limite de p_n (n fixé, $N \to +\infty$) en discutant selon la valeur de a.

1.4. Quelques précisions

On note respectivement $p\left(n,k\right)$ (resp. $q\left(n,k\right)$) la probabilité que A (resp. B) remporte la partie après k manches exactement, la fortune initiale de A valant n. Ces notations et hypothèses sont valables dans la suite.

1.4.1. Donner la valeur de $q\left(n,k\right)$ en fonction de a,b (ou a seulement) dans les cas suivants :

1.4.1.1. $k = n \in \left\{1,..,N-1\right\}$

1.4.1.2. $k < n$

1.4.1.3. $n = 1, k = 3, N > 2$

1.4.1.4. $n = 1, k = 5, N > 3$

1.4.2. Exprimer $q(n,k)$ à l'aide de a,b et de valeurs de la forme $q(l,k-1)$ si $n,k \in \mathbb{N}^*$.

1.4.3. Expliquer rapidement comment obtenir grâce à cette formule les valeurs des $q(n,k)$ en fonction de n et k dans un cas concret où N est connu.