Devoir surveillé 9

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , f et g deux endomorphismes de E.

Les deux questions sont indépendantes :

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) $f \circ g = 0_{L(E)}$
   (ii) $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
2. On suppose $f \circ g = \operatorname{Id}_E$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, v_0 \in \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 2v_n \end{cases}$$

On définit de plus

$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer MX_n. En déduire une relation entre M, X_n et X_{n+1}.
2. Exprimer X_n en fonction de X_0, M et n.
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, déterminer l'inverse de P.
4. Calculer $A = P^{-1}MP$. (Si la matrice ne contient pas 2 zéros revoir vos calculs).
5. Calculer A^n, puis M^n.
6. Exprimer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
7. Déterminer une condition nécessaire et suffisant sur u_0 et v_0 pour que les suites (u_n) et (v_n) convergent. On précisera leurs limites en fonction de u_0 et v_0, quand la condition de convergence est remplie.

Exercice 3.

On considère la $\mathbb{R}$-algèbre[1] $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on fixe une matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. On définit de plus l'ensemble

$$F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y \\ y\alpha & x \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

On notera

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ y\alpha & x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer qu'il existe $\lambda(\alpha)$ un scalaire tel que
$$A^2 - A + \lambda(\alpha) I_2 = 0_E.$$
3. Montrer $M(x_1, y_1)M(x_2, y_2) = M(x_1x_2 + \alpha y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2)$.
4. Montrer que F_A est un sous-anneau de E.
5. **Objectif de cette partie : Déterminer le nombre de solution(s) dans F_A de l'équation**
$$X^2 = -I_2 \quad (\star)$$
   (a) Justifier que $M(x,y)$ est solution de $(\star)$ si et seulement si
$$x^2 + y^2\alpha = -1 \text{ et } 2xy + y^2 = 0.$$
   (b) En déduire que $M(x,y)$ solution implique $\alpha < 0$ et $y \neq 0$.
   (c) On suppose que $\alpha < 0$, montrer que le $M(x,y)$ solution est alors équivalent à
$$x^2 + \alpha y^2 = -1 \text{ et } y = -2x.$$
   (d) Montrer que $(\star)$ a une solution si et seulement si $1 + 4\alpha < 0$. On précisera alors le nombre de solution(s).
6. **On suppose maintenant que $1 + 4\alpha < 0$ et on choisit B une solution à l'équation $(\star)$**
   (a) Justifier que $\mathrm{Vect}(I_2, B) = F_A$.
   (b) En considérant l'application définie φ de $\mathbb{C}$ dans F_A par
$$\varphi(z) = \mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}\,(z) B,$$
   montrer que l'anneau F_A est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
   (c) L'application φ est-elle linéaire ?

1. C'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.